DATE DUE

AUG 1 8 2011			

GAYLORD PRINTED IN U.S.A.

代微積拾級代

一

Algebraic Geometry.

1

ALGEBRAIC GEOMETRY, WITH DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS.

The present work, which is a translation of Loomis' ANALYTICAL GEOMETRY, AND DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS, is issued in pursuance of a project formed some time since, as the continuation of a course of mathematics, the first of which, a Compendium of Arithmetic, was published by the undersigned in 1854. The next in order is a Treatise on Algebra, which should have preceded this, but in consequence of unavoidable delays in the publication, it will not be issued till some weeks later. A tolerable acquaintance with the last-named treatise, will put the student in a position to understand the work now presented to the public. Although this is the first time that the principles of Algebraic Geometry have been placed before the Chinese (so far as the translator is aware), in their own idiom, yet there is little doubt that this branch of the science will commend itself to native mathematicians, in consideration of its obvious utility; especially when we remember the readiness with which they adopted Euclid's Elements of Geometry, Computation by Logarithms, and other novelties of European introduction. A spirit of inquiry is abroad among the Chinese, and there is a class of students in the empire, by no means small in number, who receive with avidity instruction on scientific matters from the West. Mere superficial essays and popular digests are far from adequate to satisfy such applicants; and yet when anything beyond that is attempted, the want of a common medium of communication at once appears as an insuperable obstacle; and it is evident that how clearly soever we may be enabled to lay results before the native mind, yet until they understand something of the processes by which such results are obtained, thinkers of the above class can scarcely be supposed to appreciate the achievements of modern science, to repose absolute confidence in the results, or to rest satisfied till they are in a position to some extent to verify the statements which are laid before them. It is hoped that the present translation will in some measure supply what is now a desideratum; and the translator, while taking this opportunity to testify to the exceeding care and accuracy displayed in the work of Professor Loomis, considers it is but justice to the native scholar Le Shen-lan, who has assisted in the translation throughout, to state that whatever degree of perfection this version may have attained, is almost entirely due to his efforts and talents.

A list of technical terms used in the works above-named is subjoined.

Abbrev.ted expression 簡式 *Këèn shĭh.*

Absciss 橫線 *Hwăng sëén.*

Acute sgle 銳角 *Jûy kĕŏ.*

Add 加 *Këa.*

Additio 加法 *Këa fă.*

Adjacet angle 旁角 *Pang kĕŏ.*

Algebr 代數學 *Taé soó hĕŏ.*

Algebric curve 代數曲線 *Taé soó k'eŭı sëén*

Altitue 高 *Kaou,* 股 *Koò,* 中垂線 *Chug ch'uy sëén.*

Anomly 奇式 *K'e shĭh.*

Answe 答 *Tă.*

Antecdent 前率 *Tsëên sŭh.*

Appraimation 密率 *Meĭh sŭh.*

Arc 弧 *Hoo.*

Area 面積 *Mëèn tseĭh.*

Arithnetic 數學 *Soó hĕŏ.*

Asymtote 漸近線 *Tsëèn k'ìn sëén.*

Axion 公論 *Kung lún.*

Axis 軸 *Ch'ŭh,* 軸線 *Ch'ŭh sëĕn.*

Axis najor 長徑 *Ch'âng king,* 長軸 *Ch'ing ch'ŭh.*

Axis ninor 短徑 *Twàn king,* 短軸 *Twàn ch'ŭh.*

Axis of abscissas 橫軸 *Hwăng ch'ŭh.*

Axis of coordinates 縱橫軸 *Tsúng hwéng ch'ŭh.*

Axis of ordinates 縱軸 *Tsúng ch'ŭh.*

Base 底 *Tè,* 句 *Keú.*

Binonial 二項式 *Urh heàng shĭh.*

Binonial theorem 合名法 *Hŏ ming fă.*

Biquadratic parabola 三乘方拋物線 *San shing fang p'aou wŭh sëén.*

Bisect 平分 *Ping fun.*

Brackets 括弧 *Kwŏ hoo.*

Centre of an ellipse 中點 *Chúng tëèn.*

Chord 通弦 *T'ung hëên.*

Circle 平圜 *Ping yuen.*

Circular expression 圜式 *Yuen shĭh.*

Circumference 周 *Chow.*

Circumscribed 外切 *Waé ts'ëĕ.*

Coefficient 係數 *Hé soó.*

Common algebraic expression 代數常式 *Taé soó ch'âng shĭh.*

Coincide 合 *Hŏ.*

Commensurable 有等數 *Yèw tăng soó.*

Common 公 *Kung.*

Complement 餘 *Yû.*

Complementary angle 餘角 *Yû kĕŏ.*

Concave 凹 *Yaòu.*

Concentric 同心 *T'ûng sin.*

Cone 圜錐 *Yuen chuy.*

Conjugate axis 相屬軸 *Sëang shŭh ch'ŭh.*

Conjugate diameter 相屬徑 *Sëang shŭh king.*

Conjugate hyperbola 相屬雙曲線 *Sëang shŭh shwang k'eŭh sëén.*

Consequent 後率 *Hów sŭh.*

Constant 常數 *Ch'âng soó.*

Construct 作圖 *Tsŏ t'oô.*

Contact 切 *Ts'ëĕ.*

Converging series 斂級數 *Lëen keĭh soó.*

Convex 凸 *T'ŭh.*

Coordinates 縱橫線 *Tsúng hwăng sëén.*

Corollary 系 *E.*

Cosecant 餘割 *Yû kŏ.*

Cosine 餘弦 *Yû hëên.*

Cotangent 餘切 *Yû ts'ëĕ.*

Coversedsine 餘矢 *Yû shè.*

Cube 立方 *Leĭh fang.*

Cube root 立方根 *Leĭh fang kăn.*

Cubical parabola 立方拋物線 *Leĭh fang p'aou wŭh sëén.*

Curvature 曲率 *K'eŭh sŭh.*

Curve 曲線 *K'eŭh sëén.*

Cusp 歧點 *K'e tëèn.*

Cycloid 擺線 *Paé sëén.*

Cylinder 圜柱 *Yuen ch'oó.*
Decagon 十邊形 *Shĭh pëen hîng.*
Decrease 損 *Sùn.*
Decreasing function 損函數 *Sùn hân soó.*
Definition 界說 *Keaé shwŏ.*
Degree of an expression 次 *Tszé.*
Degree of angular measurement 度 *T'oó.*
Denominator 分母 *Fun moò,* 母數 *Moò soó.*
Dependent variable 因變數 *Yin pëén soó.*
Diagonal 對角線 *Túy këŏ sëén.*
Diameter 徑 *King.*
Difference 較 *Keaóu.*
Differential 微分 *Wê fun.*
Differential calculus 微分學 *Wê fun hëŏ*
Differential coefficient 微係數 *Wê hé soó.*
Differentiate 求微分 *K'êw wê fun.*
Direction 方向 *Fang hëáng.*
Directrix 準線 *Chùn sëén.*
Distance 距線 *K'eú sëén.*
Diverging lines 漸遠線 *Tsëèn yuèn sëén.*
Diverging series 發級數 *Fă keĭh soó.*
Divide 約 *Yŏ.*
Dividend 實 *Shĭh.*
Division (absolute) 約法 *Yŏ fă.*
Division (concrete) 除法 *Ch'oô fă.*
Divisor 法 *Fă.*
Dodecahedron 十二面體 *Shĭh ûrh mëén t'è.*
Duplicate ratio 倍比例 *Peì pè lé.*
Edge of polyhedron 稜 *Lang.*
Ellipse 橢圜 *T'ò yuen.*
Equal 等 *Tăng.*
Equation 方程式 *Fang ch'ing shĭh.*
Equation of condition 偶方程式 *Gòw fang ch'ing shĭh.*
Equiangular 等角 *Tăng këŏ.*
Equilateral 等邊 *Tăng pëen.*
Equimultiple 等倍數 *Tăng peì soó.*
Evolute 漸申線 *Tsëèn shin sëén.*
Evolution 開方 *K'ae fang.*
Expand 詳 *Tsëáng.*
Expansion 詳式 *Tseáng shĭh*
Explicit function 陽函數 *Yâng hân soó.*
Exponent 指數 *Ché soó.*
Expression 式 *Shĭh.*
Extreme and mean ratio 中末比例 *Chung mŏ pè lé.*
Extremes of a proportion 首尾二率 *Shŏw weì ûrh sŭh.*
Face 面 *Mëén.*
Factor 乘數 *Shíng soó.*
Figure 形 *Hing,* 圖 *T'oô.*
Focus of a conic section 心 *Sin.*
Formula 法 *Fă.*
Fourth proportional 四率 *Szé sŭh*
Fraction 分 *Fun.*
Fractional expression 分式 *Fun shĭh.*
Frustrum 截圜錐 *Tsëĕ yuen chuy.*
Function 函數 *Hân soó.*
General expression 公式 *Kung shĭh.*
Generate 生 *Săng.*
Generating circle 母輪 *Moò lûn.*
Generating point 母點 *Moò tëèn.*
Geometry 幾何學 *Ke hô hëŏ.*
Given ratio 定率 *Tíng sŭh.*
Great circle 大圈 *Tá k'euen.*
Greater 大 *Tá.*
Hemisphere 半球 *Pwán k'ew.*
Hendecagon 十一邊形 *Shĭh yĭh pëen hîng.*
Heptagon 七邊形 *Ts'ëĭh pëen hîng.*
Hexagon 六邊形 *Lŭh pëen hîng.*
Hexahedron 六面體 *Lŭh mëén t'è*
Homogeneous 同類 *T'ûng lúy.*

Homologous 相當 *Sëang t'ang.*
Hyperbola 雙曲線 *Shwang k'eŭh sëén.* 雙線 *Shwang sëén.*
Hyperbolic spiral 雙線螺線 *Shwang sëén lo sëén.*
Hypotheneuse 弦 *Hëĕn.*
Icosahedron 二十面體 *Urh shĭh mëĕn t'è.*
Implicit function 陰函數 *Yin hân soó.*
Impossible expression 不能式 *Pŭh năng shĭh.*
Inclination 倚度 *E t'oó*
Incommensurable 無等數 *Woô tăng soó.*
Increase 增 *Tsăng.*
Increasing function 增函數 *Tsăng hân soó.*
Increment 長數 *Ch'âng soó.*
Indefinite 無定 *Woô ting.*
Independent variable 自變數 *Tszé pëen soó.*
Indeterminate 未定 *Wê ting.*
Infinite 無窮 *Woô k'eûng.*
Inscribed 內切 *Núy ts'eè,* 所容 *Sò yûng.*
Integral 積分 *Tseĭh fun.*
Integral calculus 積分學 *Tseĭh fun hëŏ.*
Integrate 求積分 *K'êw tseĭh fun.*
Interior 裏 *Lè.*
Intersect 交 *Keaou.*
Intersect at right angles 正交 *Ching keaou.*
Inverse circular expression 反圜式 *Fàn yuen shĭh.*
Inverse proportion 反比例 *Fàn pè lé.*
Irrational 無比例 *Woô pè lé.*
Isolated point 特點 *T'ĭh tëèn.*
Isosceles triangle 二等邊三角形 *Urh tăng peen san keŏ hing.*
Join 聯 *Leên.*
Known 已知 *E chè.*
Law of continuity 漸變之理 *Tseèn peen che lé.*
Leg of an angle 夾角邊 *Keă keŏ peen.*
Lemma 例 *Lé.*
Length 長短 *Ch'âng twàn.*
Less 小 *Seaòu.*
Limit 限 *Heén.*
Limited 有限 *Yèw heén.*
Line 線 *Seén.*
Logarithm 對數 *Túy soó.*
Logarithmic curve 對數曲線 *Túy soó k'eŭh seén.*
Logarithmic spiral 對數螺線 *Túy soó lo seén.*
Lowest term 最小率 *Tsúy seaòu sŭh.*
Maximum 極大 *Keĭh tá.*
Mean proportional 中率 *Chung sŭh.*
Means 中二率 *Chung ûrh sŭh.*
Measure 度 *T'ŏ.*
Meet 遇 *Yû.*
Minimum 極小 *Keĭh seaòu.*
Modulus 對數根 *Túy soó kăn.*
Monomial 一項式 *Yĭh heàng shĭh.*
Multinomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Multiple 倍數 *Peì soó.*
Multiple point 倍點 *Peì teèn.*
Multiplicand 實 *Shĭh.*
Multiplication 乘法 *Shing fă.*
Multiplier 法 *Fă.*
Multiply 乘 *Shing.*
Negative 負 *Foó.*
Nonagon 九邊形 *Kèw peen hing.*
Normal 法線 *Fă seén.*
Notation 命位 *Ming wei,* 紀法 *Kè fă.*
Number 數 *Soó.*
Numerator 分子 *Fun tszè,* 子數 *Tszè soó.*
Oblique 斜 *Seay.*
Obtuse 鈍 *Tun.*
Octagon 八邊形 *Pă peen hing.*
Octahedron 八面體 *Pă meén t'è.*
Opposite 對 *Túy.*
Ordinate 縱線 *Tsúng seén.*

Origin of co-ordinates 原點 *Yuên teèn.*
Parabola 拋物線 *P'aou wŭh seén.*
Parallel 平行 *Pîng hîng.*
Parallelogram 平行邊形 *Pîng hîng peen hîng.*
Parallelopiped 立方體 *Leĭh fang t'è.*
Parameter 通徑 *T'ung king.*
Part 分 *Fun,* 段 *T'wan.*
Partial differential 偏微分 *P'een wê fun.*
Partial differential coefficient 偏微係 *P'een wê hé.*
Particular case 私式 *Sze shĭh*
Pentagon 五邊形 *Woò peen hîng.*
Perpendicular 垂線 *Ch'uy seén,* 股 *Koò*
Plane 平面 *Pîng meén.*
Point 點 *Teèn.*
Point of contact 切點 *Ts'eĕ teèn.*
Point of inflection 彎點 *Wan teèn.*
Point of intersection 交點 *Keaou teèn.*
Polar curve 極曲線 *Keĭh k'eŭh seén.*
Polar distance 極距 *Keĭh k'eú.*
Pole 極 *Keĭh.*
Polygon 多邊形 *To peen hîng.*
Polyhedron 多面體 *To meèn t'è.*
Polynomial 多項式 *To heàng shĭh.*
Positive 正 *Ching.*
Postulate 求 *K'êw.*
Power 方 *Fang.*
Primitive axis 舊軸 *K'éw ch'ŭh.*
Problem 題 *Te.*
Produce 引長 *Yin ch'âng.*
Product 得數 *Tĭh soó.*
Proportion 比例 *Pè lé.*
Proposition 欵 *K'wàn.*
Quadrant 象限 *Seang heén.*
Quadrilateral figure 四邊形 *Szé pëen hîng.*
Quadrinomial 四項式 *Sze heàng shĭh.*
Quam proxime 任近 *Jîn k'ìn.*
Quantity 幾何 *Ke hô.*
Question 問 *Wăn.*
Quindecagon 十五邊形 *Shĭh woò peen hîng.*
Quotient 得數 *Tĭh soó*
Radius 半徑 *Pwán king.*
Radius vector 帶徑 *Taé king.*
Ratio 率 *Sŭh.*
Rational expression 有比例式 *Yèw pè lé shĭh.*
Reciprocal 交互 *Keaou woò.*
Rectangle 矩形 *Keù hîng.*
Rectangular 正 *Ching.*
Reduce 化 *Hwa.*
Reduce to a simple form 相消 *Seang seaou.*
Regular 正 *Ching.*
Relation 連屬之理 *Leên shŭh che lé.*
Represent 顯 *Heèn.*
Reverse 相反 *Seang fàn.*
Revolution 匝 *Tsă.*
Right angle 直角 *Chĭh keŏ.*
Right-angled triangle 句股形 *Keú koò hîng.*
Round 圜 *Yuen.*
Root 根 *Kăn.*
Root of equation 滅數 *Meĭh soó.*
Scalene triangle 不等邊三角形 *Pŭh tăng pëen san keŏ hîng.*
Scholium 案 *Gán.*
Secant 割線 *Kŏ seén.*
Secant (trigonometrical) 正割 *Ching kŏ.*
Segment 截段 *Tseĕ t'wan.*
Semicircle 半圜周 *Pwán yuen chow.*
Semicubical parabola 半立方拋物線 *Pwán leĭh fang p'aou wŭh seén.*
Semibiquadratic parabola 半三乘方拋物線 *Pwán san shing fang p'aou wŭh seén.*
Series 級數 *Keĭh soó.*

Sextant 記限 *Ké heén.*
Side 邊 *Peen.*
Sign 號 *Haou.*
Similar 相似 *Seang szê.*
Sine 正弦 *Ching heén.*
Singular point 獨異點 *Tŭh é teèn.*
Smaller 少 *Shaòu.*
Solid 體 *T'è.*
Solidity 體積 *T'è tseĭh.*
Sphere 立圜體 *Leĭh yuen t'è.* 球 *K'ew*
Spiral 螺線 *Lo seen.*
Spiral of Archimides 亞奇默德螺線 *A k'e meĭh tĭh lo seén.*
Square 方 *Fang,* 正方 *Ching fang,* 冪 *Meĭh.*
Square root 平方根 *Píng fang kăn.*
Straight line 直線 *Chĭh seén.*
Subnormal 次法線 *Tsze fă seen.*
Subtangent 次切線 *Tszé ts'eè seén.*
Subtract 減 *Keèn.*
Subtraction 減法 *Keèn fă.*
Sum 和 *Hô.*
Supplement 外角 *Waé keŏ.*
Supplementary chord 餘通弦 *Yû t'ung heēn.*
Surface 面 *Meén.*
Surface of revolution 曲面積 *K'eŭh meén tseĭh.*
Symbol of quantity 元 *Yuên.*
Table 表 *Peaòu.*
Tangent 切線 *Ts'eè seen.*
Tangent(trigonometrical) 正切 *Ching ts'eè.*
Term of an expression 項 *Heàng.*
Term of ratio 率 *Sŭh.*
Tetrahedron 四面體 *Szé meen t'è.*
Theorem 術 *Shŭh*
Total differential 全微分 *Tseûen wê fun.*
Transcendental curve 越曲線 *Yuĕ k'eŭh seen.*
Transcendental expression 越式 *Yuĕ shĭh.*
Transcendental function 越函數 *Yuĕ hân soó.*
Transform 易 *Yĭh.*
Transverse axis 橫軸 *Hwăng ch'ŭh,* 橫徑 *Hwăng king.*
Trapezoid 二平行邊四邊形 *Urh ping hîng peen sze peen hîng.*
Triangle 三角形 *San keŏ hîng.*
Trident 三齒線 *San ch'ê seen.*
Trigonometry 三角法 *San keŏ fă.*
Trinomial 三項式 *San heàng shĭh.*
Triplicate 三倍 *San peì.*
Trisection 三等分 *San tăng fun.*
Unequal 不等 *Pŭh tăng.*
Unit 一 *Yĭh.*
Unknown 未知 *Wê che.*
Unlimited 無限 *Woô heēn.*
Value 同數 *T'ûng soó.*
Variable 變數 *Peen soó.*
Variation 變 *Peen.*
Verification 証 *Ching.*
Versedsine 正矢 *Ching shè.*
Vertex 頂點 *Tìng teèn.*
Vertical plane 縱面 *Tsúng meen.*

SYMBOLS.

a	甲	*Këă*	*A*	呷	*Këă*	α	角	*Këŏ*	Α	㖼	*Këŏ*
b	乙	*Yĭh*	*B*	𠮃	*Yĭh*	β	亢	*K'ang*	Β	吭	*K'ang*
c	丙	*Ping*	*C*	㖪	*Ping*	γ	氐	*Tè*	Γ	呧	*Tè*
d	丁	*Ting*	*D*	叮	*Ting*	δ	房	*Fâng*	Δ	㕫	*Fâng*
e	戊	*Mow*	*E*	㖄	*Mow*	ζ	尾	*Weì*	Ε	吣	*Sin*
f	己	*Kè*	*F*	𠯆	*Kè*	η	箕	*Kê*	Ζ	㞙	*Weì*
g	庚	*Kăng*	*G*	㾘	*Kăng*	θ	斗	*Tòw*	Η	嘰	*Kê*
h	辛	*Sin*	*H*	㖕	*Sin*	ι	牛	*Nêw*	Θ	㪷	*Tòw*
i	壬	*Jîn*	*I*	㕴	*Jîn*	κ	女	*Neù*	Ι	吽	*Nêw*
j	癸	*Kweì*	*J*	㗖	*Kweì*	λ	虛	*Heu*	Κ	㚼	*Neù*
k	子	*Tszè*	*K*	吇	*Tszè*	μ	危	*Weî*	Λ	嘘	*Heu*
l	丑	*Chòw*	*L*	吜	*Chòw*	ν	室	*Shĭh*	Μ	㕒	*Weî*
m	寅	*Yin*	*M*	嗼	*Yin*	ξ	壁	*Peĭh*	Ν	㗌	*Shĭh*
n	卯	*Maòu*	*N*	𠰳	*Maòu*	ο	奎	*K'wei*	Ξ	𡑞	*Peĭh*
o	辰	*Shîn*	*O*	㖘	*Shîn*	ρ	胃	*Weí*	Ο	喹	*K'wei*
p	巳	*Szè*	*P*	吧	*Szè*	σ	昴	*Maòu*	Π	嘍	*Lôw*
q	午	*Woò*	*Q*	吘	*Woò*	τ	畢	*Peĭh*	Ρ	喟	*Wei*
r	未	*Wé*	*R*	味	*Wé*	υ	觜	*Tsuy*	Σ	㗛	*Maòu*
s	申	*Shin*	*S*	呻	*Shin*	χ	井	*Tsìng*	Τ	嗶	*Peĭh*
t	酉	*Yèw*	*T*	哂	*Yèw*	ω	柳	*Lèw*	Υ	嘴	*Tsuy*
u	戌	*Seŭh*	*U*	㖅	*Seŭh*	*F*	㖤	*Hân*	Φ	嘇	*San*
v	亥	*Haé*	*V*	咳	*Haé*	*ƒ*	函	*Hân*	Χ	哶	*Tsìng*
w	物	*Wŭh*	*W*	𠲎	*Wŭh*	φ	𠍃	*Hân*	Ψ	嘳	*Kweì*
x	天	*T'ëen*	*X*	吞	*T'ëen*	ψ	涵	*Hân*	Ω	㗍	*Lèw*
y	地	*T'é*	*Y*	㘈	*T'é*	Μ	根	*Kăn*	ε	訥	*Nŭh*
z	人	*Jîn*	*Z*	叺	*Jîn*	π	周	*Chow*	*d*	彳	*Wê*
									ʃ	禾	*Tseĭh*

A. WYLIE.

SHANGHAE,

July, 1859.

代微積拾級

胡適題

咸豐己未
孟夏之月
墨海刊行

序

中法之四元卽西法之代數也諸元諸乘方諸互乘積四元別以位次代數別以記號法雖殊理無異也我
朝康熙時西國來本之奈端二家又創立微分積分二術其法亦借徑於代數其理實發千古未有之奇秘代數以甲乙丙丁諸元代已知數以天地人物諸元代未知數微分積分以甲乙丙丁諸元代常數以天地人物諸元代變數其理之大要凡線面體皆設爲由小漸大一刹那中所增之積卽微分也其

全積即積分也故積分逐層分之為無數微分合無數微分仍為積分其法之大要恒設縱横二線以天代横線以地代縱線以彳天代横線之微分以彳地代縱線之微分凡代數式皆以法求其微係數係於彳天或彳地之左為一切線面體之微分故一切線面體之微分與縱横線之微分皆有比例而屢求微係數可得線面體之級數曲線之諸異點是謂微分術既有線面體之微分可反求其積分而最神妙者凡同類諸題皆有一公式而每題又各有一本式公式中恒兼

有天地或兼有彵訑但求得本式中天與彵之同
或地與訑之同數以代之乃求其積分即得本題之
全積是謂積分術由是一切曲線曲線所函面曲面
曲面所函體昔之所謂無法者今皆有法一切八線
求弧背弧背求八線眞數求對數對數求眞數昔之
視爲至難者今皆至易嗚呼算術至此觀止矣蔑以
加矣羅君密士合衆之天算名家也取代數微分積
分三術合爲一書分款設題較若列眉嘉惠後學之
功甚大偉烈君亞力聞而善之亟購求其書請余共

事譯行中國偉烈君之功豈在羅君下哉是書先代數次微分次積分由易而難若階級之漸升譯既竣即名之曰代微積拾級時幾何原本刊行之後一年也

咸豐九年龍在己未孟夏八日海寧李善蘭自序

幾何之學、自歐几里得至今、專門名家、代不乏人、專在古昔、希臘最究心此學、爾時以圓錐諸曲線之理爲最精深、亞奇默德而後、其學日進、至法蘭西代加德、立縱橫二軸線、推曲線內諸點距軸遠近、自有此法、而凡曲線無不可推、故曲線之數、多至無窮、而以直線爲限、一例用曲線之法馭之、既得諸曲線、依代數理推之、可得諸平面、諸曲面、諸體、其已推定之曲線、略舉其目、曰平圜線、撱圜線、雙線、拋物線、半立方拋物線、薜荔葉線、蚌線、擺線、餘擺線、和音線、次擺線、

弦切諸線、指數線、對數線、亞奇默德螺線、對數螺線、等角螺線、交互螺線、兩端懸線、奢西尼諸橢圓線、平行動線、而圜錐諸曲線與他曲線、統歸一例、無或少異、此代數幾何學也、自有代數幾何而微分學之用益大、微分學非一時一國一人所作、其源流遠矣、數學有數求數、代數無數求數、然所推皆常數、微分能推一切變數、創法者不一家、理同而術異、來本之者、日爾曼人也、立界說曰、以小至無窮之點、積至無窮多、推其幾何、名爲推無窮小點法、難者曰、無窮小之

點、雖積之至無窮、不能成幾何、解之曰、但易無窮小爲任何小、卽有積可推矣、故其說雖若難解、而其理未始不合也、而英國奈端造首末比例法、不用無窮小之長數、乃用有窮最小長數之比例、而推其漸損之限、其幾何變大、則爲末限、變小則爲首限、此法便于幾何而不便于代數、後造流數術、棄不用、而謂萬物皆自變、其變皆有速率、凡幾何俱可用直線顯之、故速率之增損、可用直線之界顯之、此說學者皆宗之、嘉慶末、法蘭西特湶勃造限法、自云不過用奈端

首末比例耳、而蘭頓別剏新法、凡微分一憑代數、不云任近限而云已得限、名曰臢理、拉格浪亦造法、多依附戴老之理、大略與蘭頓同、總論之、微分不過求變幾何最小變率之較耳、家數雖多、理實一焉、奈端來本之、同時各精思造法、未嘗相謀相師也、奈端于元上加點以顯流數、如甲̇爲甲之流數是也、用以推算、覺不便、故用來氏之彳號以顯之積分者、合無數微分之積也、亦用來氏之禾號以顯之、微分積分、爲中土算書所未有、然觀當代天算家、如董方立氏、項

梅侶氏、徐君青氏、戴鄂士氏、顧尚之氏、暨李君秋紉所著各書、其理有甚近微分者、因不用代數式故或言之甚繁推之甚難、今特偕李君譯此書、爲微分積分入門之助、異時中國算學日上、未必非此書實基之也、

咸豐九年歲在己未夏日耶穌弟子偉烈亞力序

代微積拾級

凡例

一、書中諸記號、爲古算書所未有、今詳釋之、丄者正也、加也、丅者負也、減也、右減左也、×者相乘也、又並列亦爲相乘、如甲乙卽甲乙二元相乘也、÷者約也、右約左也、或作一、法居上實居下、如$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$卽以甲約乙也、∷者指四率比例也、()者括諸數爲一數也、名曰括弧、√者、開方根也、如$\sqrt{\text{甲}}$謂甲之平方根、$\sqrt[3]{\text{甲}}$謂甲之立方根、$\sqrt[4]{\text{甲}}$謂甲之三乘方根、餘類推、元

右上角之小字名指數、有整指數、如$甲^{2}$謂甲之自乘方也、$甲^{3}$謂甲之再乘方也、$甲^{4}$謂甲之三乘方也、有分指數、如$甲^{\frac{1}{2}}$謂甲之平方根也、$甲^{\frac{1}{3}}$謂甲之立方根也、$甲^{\frac{1}{4}}$謂甲之三乘方根也、有負整指數、如$甲^{-1}$謂以甲約一也、$甲^{-2}$謂以甲自乘方約一也、$甲^{-3}$謂以甲再乘方約一也、有負分指數、如$甲^{-\frac{1}{2}}$謂以甲之平方根約一也、$甲^{-\frac{1}{3}}$謂以甲之立方根約一也、餘類推、＝者、左右二數相等也、如甲＝乙謂甲等于乙也、<者、右大于左也、>者、左大于右也、彳者微分也、如彳言

天之微分也、禾者、積分也、如禾彳天言天微分之積分也、○者、無也、∞者、無窮也、

一、凡同類之元、及圖中同類之點、皆同用一字、而以ノ彡別之、如 $天^{ノ}$ $天^{彡}$ $甲^{ノ}$ $甲^{彡}$ 之類、欲令讀者便記憶也、又或于元之右下角記一二三四等小字、如 $天_{一}$ $天_{二}$ 之類、亦係同類之元、而其理則異、

一、有簡式、有詳式、如天地和自乘、其簡式爲 $(天丄地)^{二}$、其詳式爲 $天^{二}丄二天地丄地^{二}$、凡書中言詳之者、謂依簡式、用代數乘除開方法、改爲詳式也、

一、凡代數式推定後、天元之同數、或僅有一數、或有二三四數、以至多數、皆謂之滅數、言其數代天元、能令式中正負恰消盡也、

一、舊法八線表之半徑、或爲十萬、或爲百萬千萬不等、今以半徑爲一、以一乘除、位無升降、故凡以半徑乘除者、皆不言、

一、式中諸字、有代數者、如甲乙子丑天地等字、又如周代周率、根代對數根、訥代對數底之類是也、有指實者、如弦指某角度之正弦、切指某角度之正

切、對指某數之對數、是也、

一、諸數字之旨各異、函數者、言其數中函元之加減乘約開方自乘諸數也、長數者、言幾何漸增漸減之微數也、變數者、言其數或漸變大或漸變小、非一定之數也、常數者、言其數一定不變也、

一、凡代數字、皆橫書、幾何字皆直書、而弦切諸字、配代數字亦橫書、如 甲弦 乙切 之類、是也、配幾何字亦直書、如 甲乙丙弦 丁戊己切 之類、是也、

代微積拾級目錄

代微積拾級卷一

米利堅羅密士譔

英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

代數幾何一

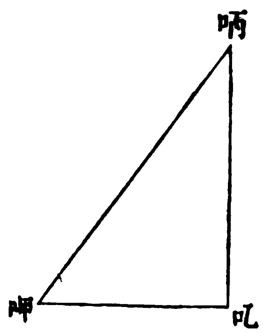
以代數推幾何

凡幾何題理、以代數號顯之、簡而易明、代數號益幾何匪淺、故近時西國論幾何諸書恒用之、幾何題中用代數之位、覺甚便、準之作圖、能顯題之全、所設所求諸數、俱包其內、法用代數已知未知諸

元代題已知未知諸數視圖中諸段有連屬之理者依幾何諸題理推之本題有若干未知數須推得若干代數式善蘭案此即四元法立天地二元則必用二式立天地人三元則必用三式也既有若干式以代數術馭之即得諸數

設題

今有句有股弦和求股



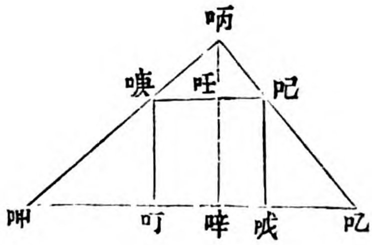
如圖呷叱哂句股形命句呷叱為乙股叱哂為天股弦和為申則弦必為

天丁申

依幾何理、$\begin{matrix}呷^{二}\\叱\end{matrix}\perp\begin{matrix}叱^{二}\\呐\end{matrix}=\begin{matrix}呷^{二}\\呐\end{matrix}$代作$乙^{二}\perp天^{二}=(甲丅天)^{二}=甲^{二}丅二甲天\perp天^{二}$、式兩邊各去天^{二}、則得$乙^{二}=甲^{二}丅二甲天$卽爲$二甲天=甲^{二}丅乙^{二}$、故得$天=\frac{二甲}{甲^{二}丅乙^{二}}$、觀此式卽知凡句股形之股、等于股弦和冪內減句冪、以倍股弦和約之之數、如句三尺、股弦和九尺、則$\frac{二甲}{甲^{二}丅乙^{二}}$卽$\frac{二\times九}{九^{二}丅三^{二}}$等于四、卽股也、

今有三角形之底與中垂線、求所容正方邊、

如圖、呷叱呐三角形、呷叱爲底、呐啐爲中垂線、叮吠吧咦爲所容正方形、命底爲乙、中垂線爲辛、方



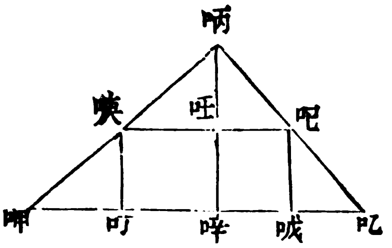
邊爲天、則哂呏必爲天丅辛、嘆吧與呷叱平行、故依相似三角形之理有比例、

呷:嘆::哂:哂
叱:吧::啐:呏

代作乙:天::辛:辛丅天、凡四率比例、首尾二率相乘、等于中二率相乘、故有式乙辛丅乙天=辛天、所以$天=\frac{乙丄辛}{乙辛}$、卽知所容正方之邊、等于底與中垂線相乘、以底垂和約之、如底爲十二尺、中垂線爲六尺、則得所容方邊四尺、

今有三角形之底與中垂線、求所容長廣有定率之

矩形、

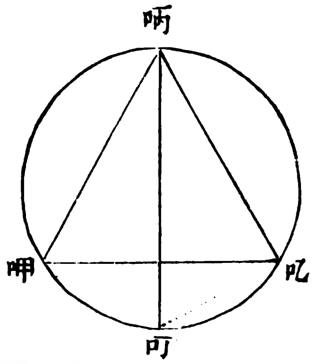


如圖、呷叱呐三角形、叮吧爲所容矩形、命底呷叱爲乙、中垂線呐啐爲辛、矩形之廣叮噢爲天、其長叮㖃爲地、又設天地定率、若一與卯、即地等于天卯、噢吧呐與呷叱呐二三角形相似、故有比例、呐旺:呐啐::噢吧:呷叱、代作天丅辛:辛::地:乙、所以地辛＝天乙丅乙辛、惟天卯＝地、故天卯辛＝天乙丅乙辛、而天＝$\frac{辛卯丄乙}{辛乙}$、設卯等于一、則

矩形之長廣等、與前題同、

今有圜徑、求所容等邊三角形之邊、

如圜、呷叮吃呐圜、呐叮爲徑、呷吃呐爲所容三角形、命呐叮爲丁、呐吃爲天、又作叮吃線、成呐吃叮句股形、



識別得叮吃爲呐叮之半、所以 $呐吃^{2}\perp吃叮^{2}=呐叮^{2}$ 卽 $天^{2}\perp\frac{丁^{2}}{四}=丁^{2}$、故 $天^{2}=\frac{三丁^{2}}{四}$、而 $天=\frac{丁\sqrt{三}}{二}$、卽知所容三角形之邊、等于圜徑乘半个三之平方根、

今有句乙、股弦較丁、求其股若干、 答式 $\frac{乙^{2}丅丁^{2}}{二丁}=天$、

今有弦辛、有句股之定率、若寅與卯、求其股若干、

答式 $\frac{\sqrt{寅^{二}\perp卯^{二}}}{(卯辛)}$、

今有弦丁、倍句股和配、求句股各若干、 答式 $巳\perp\sqrt{二丁^{二}\top巳^{二}}$、

今有矩形之對角線十尺、四邊和二十八尺、求長廣各若干、 答曰、長八尺廣六尺、 式如前題、

今有圜半徑丁、求所容等邊三角形之每邊若干、

答式 $丁\sqrt{三}$、

今有等邊三角形、于內任取一點、至三邊作三垂線、三垂線之和若干、 答曰、和等于中垂線、

今有正方對角線與一邊之較丁、求邊若干、 答式

$\text{丁}\perp\text{丁}\sqrt{\text{二}}$

今有從句股形二銳角至平分句股二點之線甲乙、求句股各若干、 答式

$\text{二}\sqrt{\dfrac{\text{一五}}{\text{四乙}^{\text{二}}\ \text{丅}\ \text{甲}^{\text{二}}}}$

$\text{二}\sqrt{\dfrac{\text{一五}}{\text{四甲}^{\text{二}}\ \text{丅}\ \text{乙}^{\text{二}}}}$

今有等邊三角形內任一點至三邊之垂線甲乙丙、求其邊若干、 答式

$\dfrac{\sqrt{\text{三}}}{\text{二}(\text{甲}\perp\text{乙}\perp\text{丙})}$

代微積拾級卷二

米利堅羅密士譔

英國　偉烈亞力　口譯

海甯　李善蘭　筆述

代數幾何二

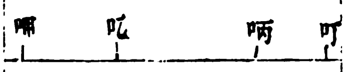
作方程圖法

作方程圖者、謂作幾何之圖、以顯代數式之數、令圖中諸叚相連屬之理、與式之諸項相應、

設題

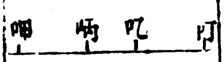
今有乙上甲二天二試作圖、

甲與乙皆代數、則可以線顯之、凡線、先取一



已定之長短、或一寸或一尺不一定為本線、設有呷叱線、甲倍本線、即可顯甲數、又設有叱呩線、乙倍本線、即可顯乙數、故作甲丄乙之圖、法任作呷叮線、乃以本線自呷度至叱、等于甲數、又自叱度至呩、等于乙數、則呷呩線、即顯甲丄乙之數、

今有天＝甲丅乙試作圖、



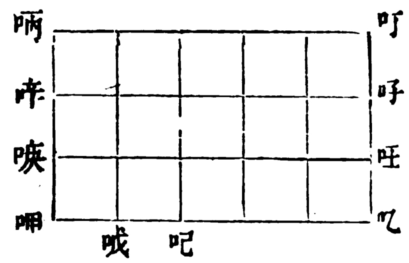
法任作呷叮線、乃自呷度至叱、等于甲、又自叱逆度至呩、等于乙、則呷呩一段、必為呷叱

叱呐之較即顯甲丁乙之數

準上二題凡元數可用線顯之故一次諸項之圖

恒任作一線正項順度之負項逆度之

今有天＝甲乙試作圖

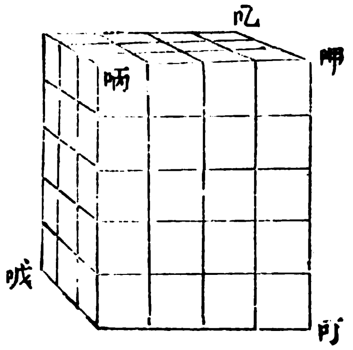


法作呷叮矩形令呷叱邊甲倍本線呷呐邊乙倍本線呷哦哦吧呷咦咦啐諸段皆等于本線從哦吧諸點作線皆與呷呐平行又從咦啐諸點作線皆與呷叱平行則下層呷吒矩形有甲个本線

之正方次層咦呀亦然呷哂線中有若干本線則亦有若干層故呷叮矩形中有乙乘甲个本線正方即顯甲乙之數

準此題凡二元相乘可以面顯之

今有甲乙丙＝天試作圖

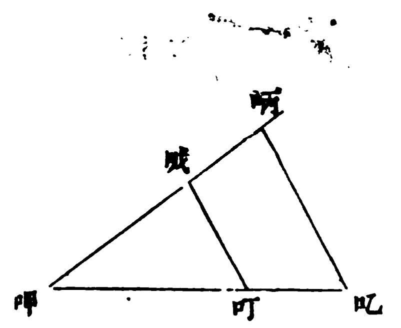


法作呷𠯫立方體令呷叱邊甲倍本線呷哂邊乙倍本線呷叮邊丙倍本線試于三邊諸本線之界點作諸平面與叱哂哂叮哂𠯫三面

平行、分本體爲若干本線之立方、其立方之數爲$甲\times乙\times丙$、理易明、故此本體可顯$甲乙丙$之數、

準此題、凡三元相乘、可以體顯之、

今有$天=\frac{丙}{甲乙}$試作圖、



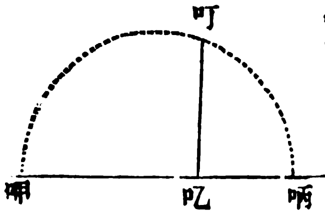
別得$天=\frac{丙}{甲乙}$則有比例$丙:甲::乙:天$丙甲乙爲一二三率、天爲第四率、法從呷點任作呷吃呷呥二線、不論成何角、乃從呷度至叮、令等于丙、又從呷度至吃、令等于甲、次從呷度至呅、等于乙、次作叮呅線、次從吃

點與叮哦平行作吃呐線、則呷呐必等于天、蓋準相似三角形之理、有比例 $呷呐:呷哦::呷吃:呷叮$ 即 $呷呐:乙::甲:丙$、故 $呷呐=\frac{丙}{甲乙}$

今有 $天=\frac{丁戊}{甲乙丙}$、試作圖、

此式可作 $\frac{丁\times戊}{甲乙\times丙}$、即 $\frac{丁}{甲乙}\times\frac{戊}{丙}$、先以丁甲乙為一二三率、求其四率寅、$寅:乙::甲:丁$、故 $寅=\frac{丁}{甲乙}$、是所求為 $\frac{戊}{寅丙}$、法依前題作圖、

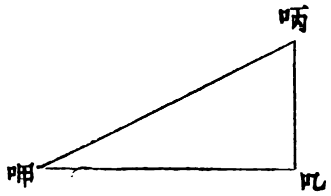
今有 $天=\sqrt{甲乙}$、試作圖、



别得 $\sqrt{甲乙}$ 為甲乙之中率、法任作一直線、乃于線內取呷吃、等于甲、取吃呐、等于乙、次以甲乙之和呷呐為全徑、作呷叮

呩半圜、次從吆點作呷呩之垂綫至圜周叮、則吆叮爲呷吆吆呩二線之中率、所以吆叮卽顯$\sqrt{甲乙}$之數、

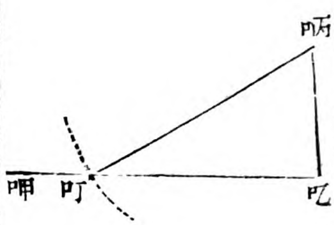
今有$天=\sqrt{甲^{2}\bot乙^{2}}$、試作圖、



法作呷吆線、等于甲、從吆作呷吆之垂線吆呩、等于乙、次作呷呩聯線、卽顯$\sqrt{甲^{2}\bot乙^{2}}$之數、蓋$呷呩^{2}$等于$呷吆^{2}\bot吆呩^{2}$故也、

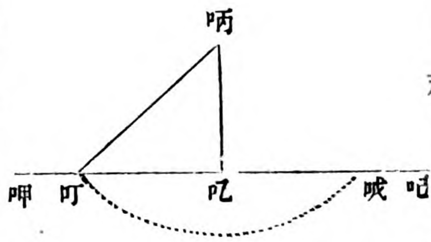
今有$天=\sqrt{甲^{2}丅乙^{2}}$、試作圖、

法任作直線呷吆、從吆點作呷吆之垂線吆呩、令



等于乙、次以㖐爲心、甲爲半徑、作短弧、交呷吃于叮、則叮吃必顯$\sqrt{甲^2-乙^2}$之數、蓋$叮吃^2$等于$㖐叮^2-吃㖐^2$、即$甲^2-乙^2$、所以叮吃等$\sqrt{甲^2-乙^2}$、

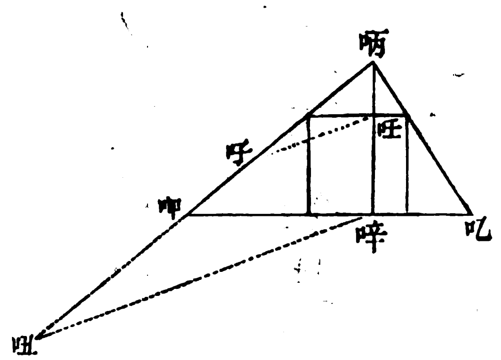
今有$天=甲\pm\sqrt{甲^2-乙^2}$試作圖、



法任作呷𠯋線、于線內取呷吃分、等于甲、從吃點作呷吃之垂線吃㖐、令等于乙、次以㖐爲心、甲爲半徑、旋規作弧線、交呷𠯋于叮哦二點、則吃叮吃哦俱等于$\sqrt{甲^2-乙^2}$蓋從吃點起、正則順度至哦、負則逆度至叮

也、故呷叮呷哦皆顯所求之數、蓋$\frac{哦}{呷}$等于$\frac{吃}{呷}丄\frac{哦}{吃}$即$甲丄\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$、$\frac{叮}{呷}$等于$\frac{吃}{呷}丅\frac{叮}{吃}$、即$甲丅\sqrt{甲^{二}丅乙^{二}}$、所以此二數爲下式$天^{二}丅二甲天＝丅乙^{二}$之二減數、

今有三角形、已知底與中垂線、試作形內所容正方形圖、

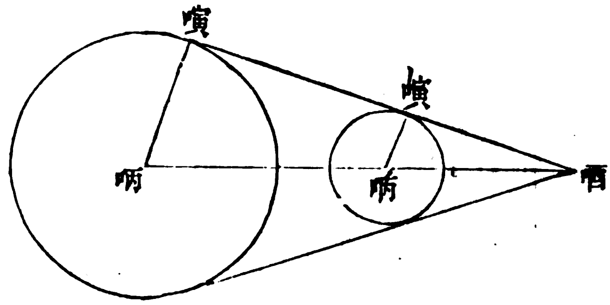


前求得正方形之邊爲$\frac{乙辛}{乙丄辛}$、卷一二題故乙丄辛乙辛爲一二三率、方邊爲四率、法作呷吃哂三角形、亦作中垂線哂啐、即辛、呷吃底即乙、于呷哂內取哂吁、等于辛、引長吁呷成吁丑、等于乙、次作

呾啐聯線、又與呾啐平行作呼旺線、遇中垂線于旺、則旺啐必等于所求正方邊、蓋準相似三角形之理、有比例 旺啐:哂啐::呼呾:哂呾、 卽 旺啐:辛::乙:辛丄乙 所以 旺啐＝$\frac{乙丄辛}{乙辛}$、 故 旺啐 顯所求正方之邊、一卷第三題若欲作圖、但取哂呼等于 卯辛、餘如本題法、卽得、

今有大小二圜、在一个平面內、試作二圜之公切線、哂哂為二圜心、哂哂哂為過二心線、若已知公切線嗔嗔、引長之與過心線遇于哂、于二切點作嗔

呐嗔呐二半徑、成呐嗔哂呐嗔哂二相似三角形、因嗔嗔皆爲直角故也、乃以未代呐嗔、以耒代呐嗔、以甲代呐呐、以天代呐哂、則呐哂必爲天丁甲、有



比例率如下、

呐嗔:呐嗔::呐哂:呐哂、

即

未:耒::天:天丁甲、

則

未天丁未甲=耒天、

而

天=未甲/耒丁未、

即知

耒丁未

未甲爲一二三率、天即呐哂爲四率、依幾何理得

作圖法、任作呐卯呐卯二平行半徑、次作卯卯聯線、引長之遇過心線于哂、乃自哂作小圜之切線

晒嗩引長之、亦必爲大圜之切綫晒嗩也、試自唧與晒呐平行作唧叮綫、必等于呐呐、卽甲唧叮卽禾丅未、叮唧唧與呐唧晒爲相似三角形、故有比例

呐晒：呐唧：：叮唧：叮唧、

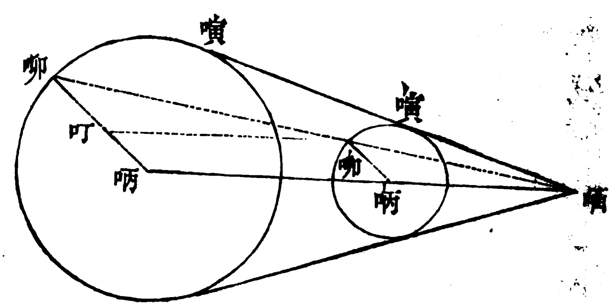
卽

呐晒：未：：甲：禾丅未

所以

呐晒＝禾丅未／甲未、

其右邊卽前天之同數、故從晒點作此圜之切綫、引長之亦爲彼圜之切綫也、



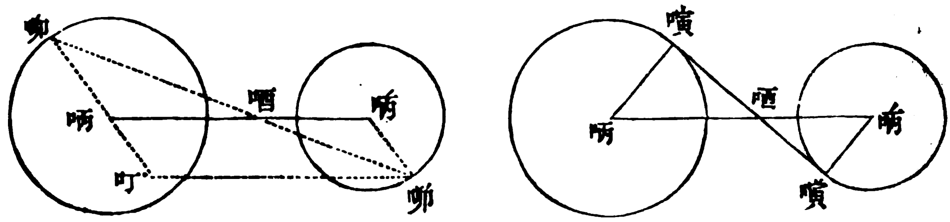
一系、若大圜半徑未爲常數、小圜半徑禾漸長、則

未丁未

必漸損而分子甲未爲常數、故天之同數必漸增、所以二圜漸近相等、則公切線與過心線之交點、距圜周必漸遠、若未與未相等、則分母爲○而交點距圜周之數爲○c、而天之同數無窮大、

二系、若未漸長、至大于未、則天之同數變爲負、哂點必在二圜之左、

三系、二圜之間、可另作互相視之公切線、以天代哂酉、未未代二半徑、甲代二心相距線、則哂嗔哂、哂嗔哂爲相似三角形、故有比例如左、



呐嗔:呐嗔::呐唒:呐唒即未:禾::天:甲丅天、所以天＝$\frac{未丄禾}{甲未}$、此式亦可依前例作圖、法于過心線左右作呐唧呐唧二平行半徑、次作唧唧聯線、交過心線于唒、乃從唒作此圜之切線、引長之亦必爲彼圜之切線、試引長唧呐、從唧點與呐呐平行作唧叮線、等于呐呐、即甲、唧叮即未丄禾、唧呐唒唧叮唧爲相似三角形、故有比例、唧叮:叮唧::唧呐:呐唒、即未丄禾:甲::未:呐唒、故呐唒＝$\frac{未丄禾}{甲未}$、式右邊即前天之同

數、故知前後兩圖之哂晒不異、

凡代數式可作圖者、其式之諸項、必元數相等、或俱一次（謂單元）表線、或俱二次（謂二元相乘）表面、或俱三次（謂三元連乘）表體、是謂同類之式、若異類之式、不能相加減、不可作圖也、

或有式似不同類、而亦可作圖者、則因中有一元以一代之、故凡乘約諸項之法數母數俱隱不見、若此諸項內各紀代一之元、則仍爲同類之式、如下、

天＝甲乙丄丙

此

式似不同類、以丑代一、則得丑天＝甲乙丄丑丙、卽$天＝\frac{丑}{甲乙}丄丙$、卽爲同類式、故

可作圖、

代微積拾級卷三

米利堅羅密士譔
英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

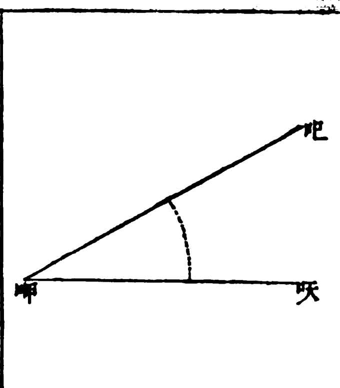
代數幾何三

論點

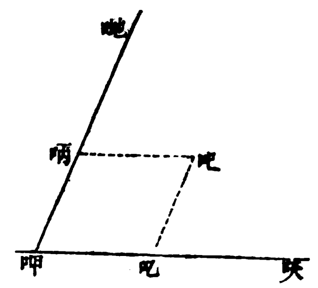
顯面内之點有二法、

一以所設點距原點及方向顯之、如呷爲原點、呷吠爲原線、即所知方向、若知呷吧之距、及吧呷吠角、即知吧點之方位　原點呷名曰極、吧呷距名曰帶徑、

帶徑與原線之交角、及帶徑、名極角距、



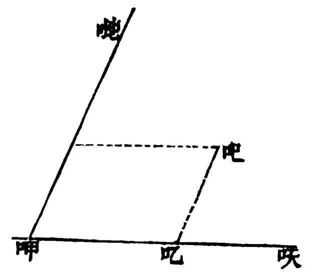
二、用相交兩線、知所設點與兩線之距、即知點之方位、是謂顯點捷法、如呷吷呷咃二線相交于呷點、吧爲同面內所設之點、吧吃與呷咃平行、吧呥與呷吷平行、知吧吃吧呥各若干、即知吧點方位、　呷吷呷咃名二軸線、



交點呷名原點、呥吧與呷吃等、名爲吧點之橫線、吃

吧與呷㖶等名爲吧點之縱線、呷吠名曰橫軸、呷㘝名曰縱軸。縱橫二線合稱之曰縱橫線、可互爲縱橫也、二軸亦合稱曰縱橫軸、㘝呷吠角、或直、或銳、或鈍、無一定、故二軸或正交、或斜交、俱可、然恆用正交、取其便也、橫線恆用天代、縱線恆用地代、故橫軸恆誌以吠、縱軸恆誌以㘝、點之橫線恆與橫軸平行、其長如點距縱軸、點之縱線恆與縱軸平行、其長如點距橫軸、

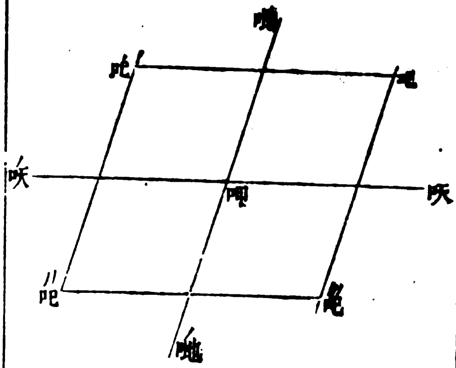
知點之縱橫線、則亦知其方位、如點之橫線爲甲、縱



線爲乙定點之方位、法從原點呷度橫線至吃、等于甲、從吃點與縱軸平行作吃吧、等于乙、則吧即所求之點、 求點之方位、但用二式、甲—天 乙—地、甲乙爲已知數、此二式名曰點式、

欲知點之方位、必先知甲乙二數、又必知二數之正負、縱橫軸過原點呷引長之至呋哋二點、則從呷度橫線向呋、與向呋之號必相反、度縱線向哋、與向哋之號必相反、點之方位、若無此分別、則式所指必混

而不明、如吧吧′吧″吧‴四點、其縱橫線之式無異、則點在軸之上下左右莫辨、今以順度之線爲正、逆度之線爲負、而後方位犂然、約言之、橫線自呷



點向右爲正、向左爲負、縱線自呷點向上爲正、向下爲負、

以哋呷呋角爲第一角、哋呷呋′角爲第二角、哋′呷呋′角爲第三角、哋′呷呋角爲第四角、四角內各點式列如左、

第一角內吧點之式

天═══丄甲
地═══丄乙

第二角內吧點之式

天═══丅甲
地═══丄乙

第三角內〃吧點之式

天═══丅甲
地═══丅乙

第四角內〃吧點之式

天═══丄甲
地═══丅乙

若點在橫軸內、則 地══乙 變爲 地══〇、故得

天══丄甲
地══〇、

此式指點在橫軸內、距原點等于甲、若點在縱軸內、則 天══甲 變爲 天══〇、故得

天══〇
地══丄乙、

此式指點在縱軸內、距原點等于乙、若點卽原點、則爲縱橫軸內之公點、其式爲

天══〇
地══〇、

設題

今有天=丄四地=丅三、求其點之方位、

今有天=丅二地=丄七、求其點之方位、

今有天=〇地=丅五、求其點之方位、

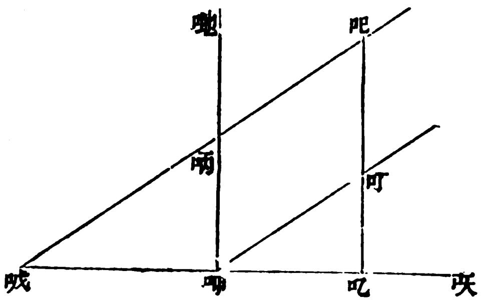
今有天=丅八地=〇、求其點之方位、

論線

凡線之式、乃以縱橫線表諸點之相聯、

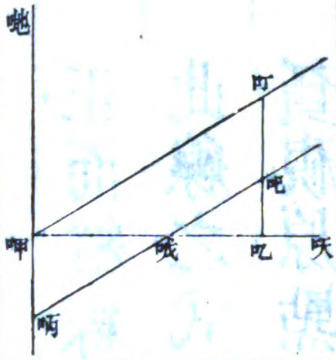
第一款　直角縱橫軸之線式爲地=甲天丄乙、式中天與地、爲線內諸點之縱橫線、甲爲線與橫軸交角之正切、

乙爲線交縱軸點距原點分甲乙俱或正或負不定、



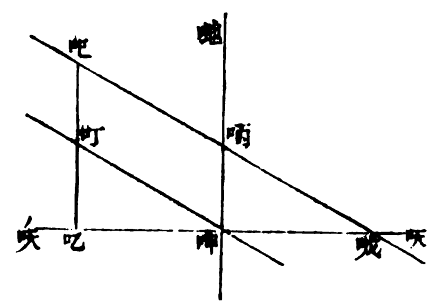
如圖、呷爲縱橫軸之原點、呷呋呷哋爲正交二軸、吧哂爲所求之線、此線內任取吧點、作呷呋之垂線吧吃、即爲吧點之縱線、呷吃爲吧點橫線、從呷點與哂吧平行作呷叮線、遇吧吃于叮、命呷吃爲天、吃吧爲地、哦角即叮呷呋角正切爲甲、呷哂即叮吧爲乙、半徑爲味、準三角術有比

例咮：呷吃：：叮呷呋切：吃叮、即咮：天：：甲：吃叮、以半徑爲一、則得吁一甲天、惟吃吧等于吃



叮加叮吧、故地一甲天丄乙、若哂吧線交縱軸點在原點呷下、則吃吧等于吃叮少叮吧、即得式地一甲天丅乙、

此二圖吧哂與橫軸交、皆成銳角、若式之正負不訣、則任用銳鈍諸角皆同、凡所求線與橫軸之交角、恒從呷呋軸左旋取其度、故若爲鈍角、其正切必負、

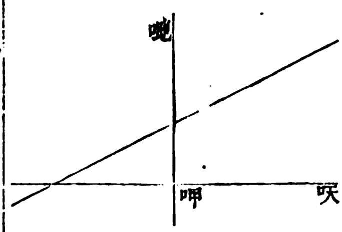


如圖呷呋呷哋為正交二軸吧哂為所求之線哂呲呋為鈍角準三角理有比例吃叮．叮呷呋切．．呷吃．味橫線呷吃在原點左為負叮呷呋之正切亦為負是二三率俱負故乘得正而縱線吃叮向上恰為正故與前銳角無異而此線之式為乙丄天甲丁二地式中負號指甲非指天蓋天之正負視原點左右方向設吧哂線過呷哋軸向右引長之則其橫線必為正矣

準此論推之線在二軸之上下左右其勢有四各

以式中甲乙二元顯之、如下、

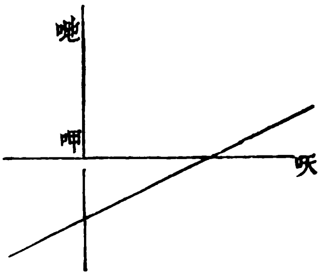
一、設線交呟軸在原點之左、交吔軸在原點之上、



則甲乙皆爲正、而得式

地＝一丄甲天丄乙、

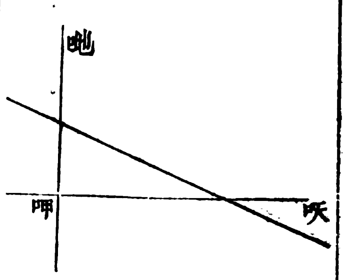
二、設線交呟軸在原點之右、交吔軸在原點之下、



則甲爲正、乙爲負、而得式

地＝一丄甲天丅乙、

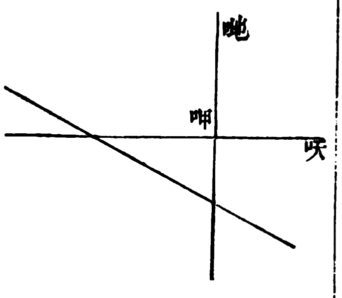
三、設線交呋軸在原點之右、交哋軸在原點之上、



則甲爲負、乙爲正、而得式

地＝丅甲天丄乙、

四、設線交呋軸在原點之左、交哋軸在原點之下、



則甲乙皆爲負、而得式

地＝丅甲天丅乙、

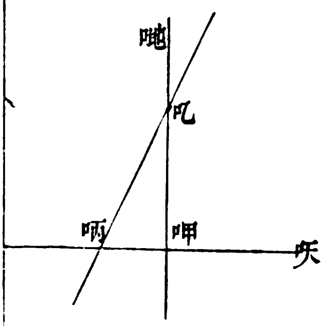
又設線過原點呷、則乙必等于〇、而得式

地＝甲天、

設題

今有地＝二天丄四、求作式之線、

法設天＝〇、則地＝四、地之同數、顯線與縱軸之交點、蓋此點外、更無橫線等于〇之點者、先作縱橫軸呷呋呷吔、次從呷度至叱、等于四、則叱爲所求線內之一點、又設地＝〇、則二天＝丅四、即天＝丅二、天之同數、顯線與橫軸之交點、蓋此點外、更無縱線等于〇之點者、從呷度至哂、等于二、則哂爲所求線內之又一點、乃過叱哂二點作線、即式

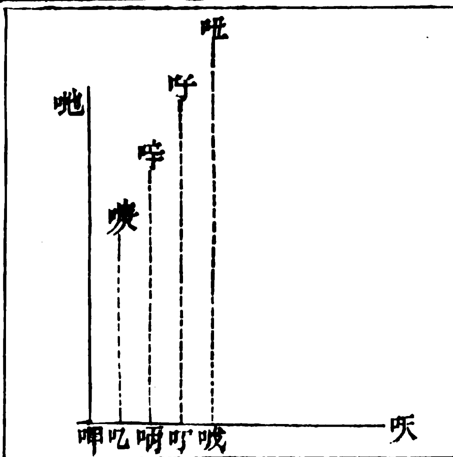


之線也、

定一元同數、依式可得餘一元同數、如法取天地二元之諸同數、可得本線諸點之方位、 次第取諸同數如下、

天=一 地=六
天=二 地=八
天=三 地=一○
天=四 地=一二

餘類推、



以圖明之、作正交二軸呷呠呷哋、依天=一地=六二同數、于橫軸內取呷吃、等于一、作吃嘆垂線、等于六、則嘆爲線之第一點、又依天=二地=八、取呷哂、等于二、作

呞哰垂線、等于八、則哰爲線之第二點、如法又取

呼呾二點、式之線必過嘆哰呼呾諸點、

今有地=二天丄三、求作式之線、

今有地=三天丅七、求作式之線、

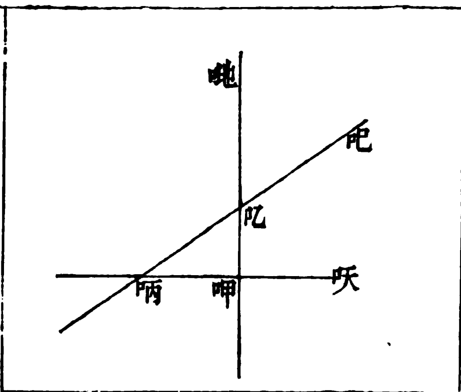
今有地=丅天丄二、求作式之線、

今有地=丅二天丅五、求作式之線、

凡直線式地=甲天丄乙、甲乙二數不變、而縱橫線天地隨所求線內各點而變、故甲乙爲常數、天地爲變數、

第二款　凡函二變數一次方程式、恒爲直線式、

函二變數之一次式、可變之如下式 呷地＝叱天丄呐、卽 地＝$\frac{呷}{叱}$天丄$\frac{呷}{呐}$、以甲代$\frac{呷}{叱}$、乙代$\frac{呷}{呐}$、則變爲 地＝甲天丄乙、㈠、法作正交縱橫二軸呷呋呷咃、取呷叱等于乙、取呷呐等于$\frac{甲}{乙}$、過叱呐二



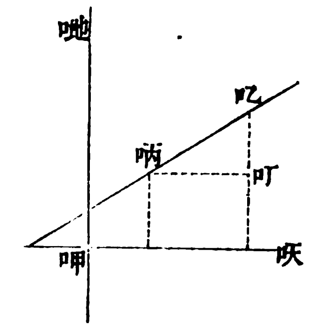
點作吧叱呐線、卽㈠式線、蓋線式爲 地＝$\frac{呷呐}{呷叱}$天丄$\frac{呷}{叱}$ ㈡、準圖 $\frac{呷呐}{呷叱}$＝乙÷$\frac{甲}{乙}$＝甲 $\frac{呷}{叱}$＝乙、故㈠㈡兩式同、皆爲呐叱吧線式、

設題

今有二地＝三天丅五、求作式之線、

第三款　凡直線過所設點、其式為地丅地′＝甲(天丅天′)、天′地′為本點之縱橫線、天地為線內任一點之縱橫線、甲為線與橫軸交角之正切、　凡所知諸點之縱橫線、例以天′地′天″地″天‴地‴諸元指之、名為第一天地、第二天地、第三天地、餘仿此、

如圖、吧為所設點、其縱橫線命為天′地′、凡線內諸



天變爲天$'$、地必變爲地$'$、則式變爲$地'=甲天'+乙$㈡、又若天變爲天$''$、地必變爲地$''$、則式變爲$地''=甲天''+乙$㈢、㈠式有四未知數、得㈡㈢兩式、此四數始有定限、三式對合爲一式、則有二未知數、可消去法、以㈡式減㈠式、得$地-地'=甲(天-天')$㈣、以㈢式減㈡式、得$地'-地''=甲(天'-天'')$、即$甲=\frac{地'-地''}{天'-天''}$、以此甲之同數代㈣式中之甲、則得式$地-地'=\frac{地'-地''}{天'-天''}(天-天')$、即過吃哂二點之線式、甲等于$\frac{地'-地''}{天'-天''}$者、蓋$地'-地''$即

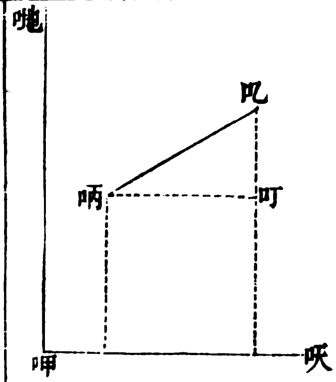
卯叮、天′丁天即昞叮、故$\frac{天′丁天}{地′丁地}$即$\frac{昞叮}{卯叮}$、所以等于卯昞叮角之正切、若所設線過原點、則天′＝〇、地′＝〇、而得式地丁地′＝$\frac{天′}{地′}$(天丁天′)、即過原點及所設卯點之線式、

設題

今有二點、一點之縱橫線爲天′＝七、地′＝四、一點之縱橫線爲天″＝五、地″＝三、求過二點之線式、及線交橫軸之角、

今有二點、一點爲天′＝二、地′＝三、一點爲天″＝四、地″＝五、求過二點之線式、

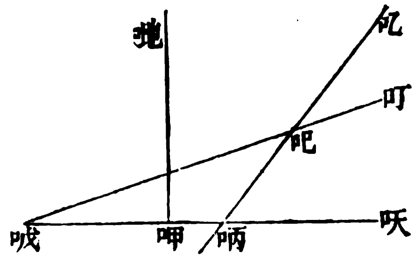
第五款　凡二點相距線之式爲$\sqrt{(天'-天'')^{2}+(地'-地'')^{2}}$、天′地′爲第一點之縱橫線、天″地″爲第二點之縱橫線、



如圖、叱呐爲所設二點、叱之縱橫線爲天′地′、呐之縱橫線爲天″地″、試與呷呋平行作呐叮線、則二點相距線叱呐等于$\sqrt{呐叮^{2}+叱叮^{2}}$惟$呐叮=天'-天''$、$叱叮=地'-地''$、故叱呐相距之線式爲$\sqrt{(天'-天'')^{2}+(地'-地'')^{2}}$、

第六款　凡二直線交角之正切式爲$\frac{甲'-甲}{1+甲甲'}$、甲甲′爲二

線與横軸交角之二正切、



如圖、吃呐叮哦為所設二線、交于吧點、假令叮哦線之式為

$$\text{地}=\text{甲天丄乙}$$

吃呐線之式為

$$\text{地}=\text{甲′天丄乙′}$$

則甲為吧哦呋角之正切、甲′為吧呐呋角之正切、吧呐呋角為吧呐哦之外角、故等于呐吧哦呐哦吧二角和、而呐吧哦角等于吧呐呋吧哦呋二角較、命吧哦呋角為角、吧呐呋角為角′、則有式、

$$\text{哦吧呐}=\text{吧呐呋}\,\text{丅}\,\text{吧哦呋}=\text{角′丅角}$$

故

$$\text{哦吧呐切}=(\text{吧呐呋丅吧哦呋})\text{切}=(\text{角′丅角})\text{切}$$

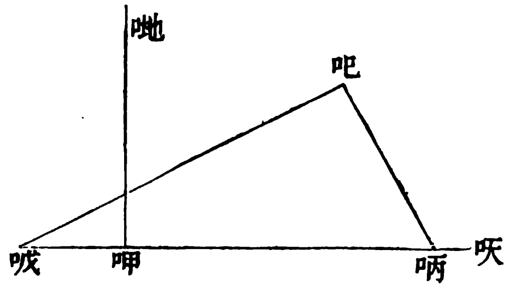
惟

$$(\text{角′丅角})\text{切}=\frac{\text{角′切丅角切}}{\text{一丄角′切角切}}$$

故

$$\text{哦吧呐切}=\frac{\text{甲′丅甲}}{\text{一丄甲′甲}}$$

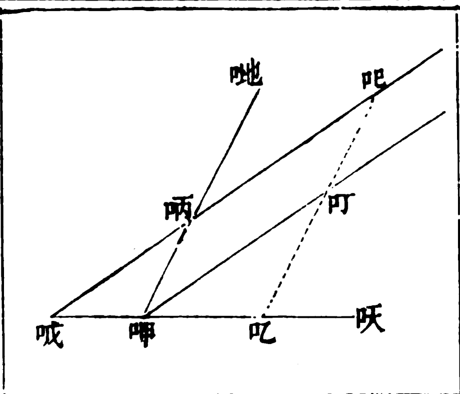
若二線正交、其角之正切無窮大、必令$\frac{一丄甲甲'}{甲'丁甲}$亦無窮大、故母數一丄甲甲′必爲○、所以甲甲′=丁一、而甲=丁$\frac{甲'}{一}$、遇式如此、二線必成直角、以三角理明之、如吧哂吧呅爲正交二線、則吧哂呅爲吧呅哂之餘角、凡切乂餘切=咊、即一、所以吧哂呅切吧呅哂切=一、而吧哂呋爲吧哂呅之外角、則正切同而正負異、所以吧哂呋切吧呅哂切=丁一、即甲甲′=丁一、準前款、本卷三款過所設點之線



式爲地′丁地=甲(天′丁天)、求線之垂線、必以丁$\frac{甲'}{一}$代甲、則得地′丁地=丁$\frac{甲'}{一}$(天′丁天)、即顯過

所設點一線爲餘一線之垂線、

第七款　凡直線以斜交二軸爲準、其式爲地二甲天丄乙　甲爲線交橫軸角與交縱軸角二正弦之比例數、



如圖、呷爲原點、呷呋呷哋爲斜交二軸、吧㕲爲式線、于線內任取吧點、與呷哋平行作吧吃、爲吧點之縱線、呷吃爲吧點橫線、自呷與㕲吧平行作呷叮線、遇吃吧于叮、吧哦呋角卽叮呷呋角、命爲角、哋呷呋角命爲亢、吧吃與呷哋平行、故呷叮吃等、叮呷哋

角、即等于亢丁角、命呷叱爲天、叱吧爲地、呷呐即叮吧、爲乙、準三角例有比例 $叱叮:呷叱::角弦:(亢丁角)弦$ 即 $叱叮:天::角弦:(亢丁角)弦$、故 $叱叮=天\frac{(亢丁角)弦}{角弦}$ 惟 $叱吧=叱叮⊥叮吧$ 所以 $地=天\frac{(亢丁角)弦}{角弦}⊥乙$、

此式中 $\frac{(亢丁角)弦}{角弦}$ 之數以甲代之、得下式 $地=甲天⊥乙$、與第一款式同、而甲所代之數不同、

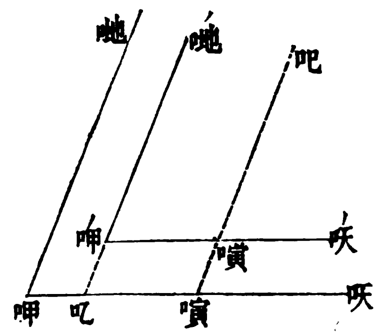
易縱橫軸法

凡線既準二軸得式、可任易他二軸而變其式、其法有三、原點易而二軸方向不易、一也、二軸方向易而原點不易、二也、原點與二軸方向俱易、三也、

第八款　凡線準二軸得式、易其原點、不易二軸方向、法如下、

甲乙為準新原點之縱橫線、天′丄甲＝天、地′丄乙＝地、

如圖、呷吠呷吔為二舊軸、呷′吠′呷′吔′為二新軸、所設之線皆準之、命新原點之縱橫線呷吃吃呷′為甲乙、任取線內吧點、命其準舊軸之縱橫線為天地、準新



軸之縱橫線為天′地′、則得式 呷嗔＝呷吃丄吃嗔、吧嗔＝嗔′嗔丄吧嗔′、即 天＝甲丄天′、地＝乙丄地′、為易軸之式、

新原點呷′、于舊軸之四角內俱可置之、但

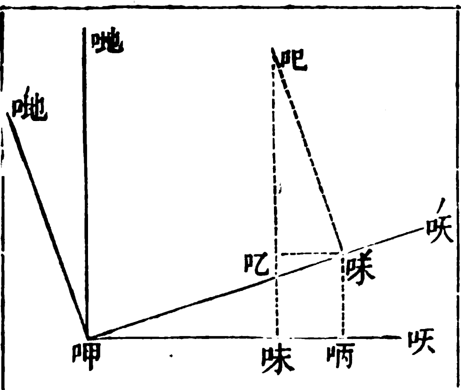
甲乙之正負須分別

第九款　凡正交二軸、易其方向、原點與角俱不易、線之式爲

弦天角=餘弦地角丅天′角弦、

弦地角=餘弦天′角丄地′角弦、

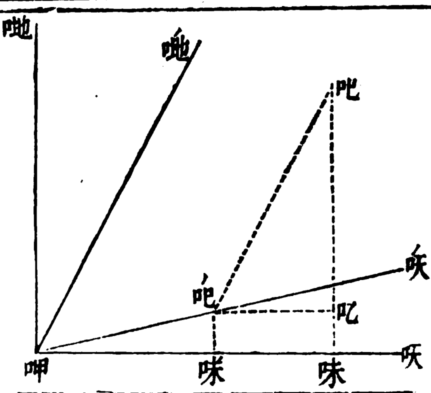
角爲二呋軸之交角、



如圖、呷呋呷哋爲二舊軸、呷呋呷哋爲二新軸、命吧點準舊軸之縱橫線爲天地、準新軸之縱橫線爲天地、命呋呷呋角爲角、從吧作呷呋之垂線吧味、作呷呋之垂線吧咊、又與吧味平行作咊呐、與呷呋平

行作味吃、則 $\frac{呷}{味}=\frac{呷}{呐}丅\frac{呐}{味}$、惟 $\frac{呷}{味}=天$、$\frac{呷}{呐}=\frac{呷}{味}\times$呋呷呋餘弦$=天角餘弦$、$\frac{呐}{味}=\frac{吃}{味}=\frac{吧}{味}\times$吃吧味弦$=地角弦$、所以 $天=天角餘弦丅地角弦$、又 $\frac{吧}{味}=\frac{吃}{味}丄\frac{吧}{吃}$、惟 $\frac{吧}{味}=地$、$\frac{吃}{味}=\frac{呋}{呐}=\frac{呷}{味}\times$呋呷呋弦、$=天角弦$、$\frac{吧}{吃}=\frac{吧}{味}\times$吃吧味餘弦$=地角餘弦$、所以 $地=天角弦丄地角餘弦$、若軸之方向與原點俱易、而新原點之縱橫線為甲乙、則式為 $天=甲丄天角餘弦丅地角弦$ $地=乙丄天角弦丄地角餘弦$、

第十款 凡正交二軸、易為斜交二軸、則其線之式為 $天=天角餘弦丄地角餘弦$、$地=天角弦丄地角弦$、此式角角指二新軸交舊橫軸之二角



如圖、呷呋呷咃爲二舊軸、呷呋呷咃爲二新軸、命呋呷呋角爲角、呋呷咃角爲角、任取吧點、與呷咃平行作吧咊、與呷咃平行作吧咆、又從吧點與呷咃平行作咆咊、與呷呋平行作咆吃、則有式

呷咊=呷咊⊥咊咊

惟

呷咊=天、

呷咊=呷咆呋呷呋餘弦=天角餘弦、

咊咊=咆吃=吧咆=咆吧咆餘弦=地角餘弦、

所以

天=天角餘弦⊥地角餘弦、

又

吧咊=吃咊⊥吧吃、

惟

吧咊=地、

吃咊=咆咊=呷吧=呋呷呋弦=天角弦、

吧吃=吧咆=吧咆吃弦=地角弦、

所以

地=天角弦⊥地角弦、

若并易原點、而新原點準舊軸之縱橫線爲甲乙、其式

為

天=甲丄天′角餘弦丄地′角餘弦、

地=乙丄天′角弦丄地′角弦、

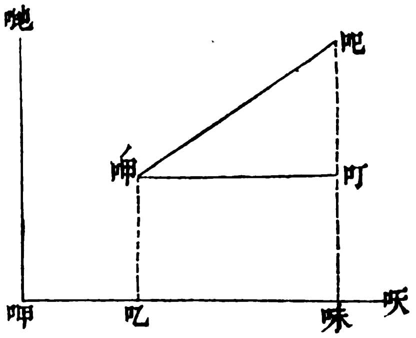
第十一款

準正交縱橫線易為準極角距其式為

天=甲丄未亥餘弦

地=乙丄未亥弦、

未為帶徑、亥為帶徑交橫軸之角、



如圖、呷吠呷咃為二舊軸、呷′為極點、呷′叮與呷吠平行、為極角起度之線、命帶徑呷′吧為未、吧呷′叮角為亥、準舊軸吧點之縱橫線為天地、呷′點之縱橫線為

甲乙、則有式$\frac{呷}{味}=\frac{呷}{吃}上\frac{吃}{味}$、惟$\frac{吃}{味}=\frac{呻}{叮}=\frac{呻}{吧}=$吧呻叮餘弦$=$未亥餘弦、所以天$=$甲上未亥餘弦、又$\frac{吧}{味}=\frac{叮}{味}上\frac{吧}{叮}$、惟$\frac{吧}{叮}=\frac{呻}{吧}$、吧呻叮弦$=$未亥弦、所以地$=$乙上未亥弦、

若極點呻在呷、則式為天$=$未亥餘弦地$=$未亥弦、

代微積拾級卷四

米利堅羅密士譔　英國偉烈亞力口譯
海寧李善蘭筆述

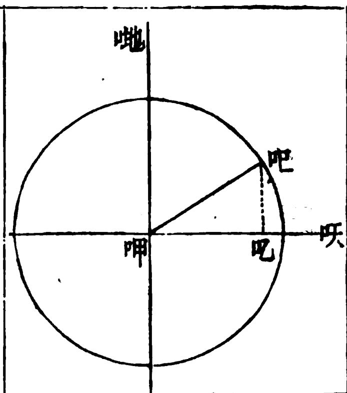
代數幾何四

論圜

圜爲平面、其界距心俱等、界名圜周、界心距線名半徑、

第一款、凡縱橫線之原點在圜心、其式爲$\text{天}^{二}\text{丄}\text{地}^{二}=\text{味}^{二}$、味爲半徑、天地爲弧線任一點之縱橫線、

如圖、呷為圜心、任取半徑、旋規作弧、弧內諸點距呷俱等、命距線為味、任取弧之吧點、命其縱橫線呷吃吃吧為天地、

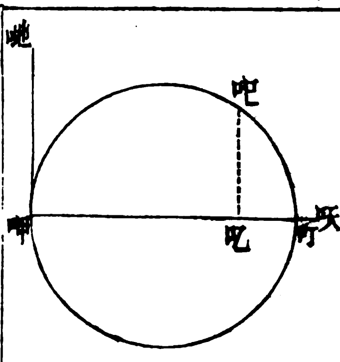


準幾何理得式 $\text{呷吃}^2+\text{吃吧}^2=\text{呷吧}^2$、即 $\text{天}^2+\text{地}^2=\text{味}^2$、為所求式、欲定弧線交橫軸之點、則當令 $\text{地}=0$、即得 $\text{天}=\pm\text{味}$、所以弧線交橫軸之點有二、在原點之左右、距原點皆為半徑、欲定弧線交縱軸之點、則當令 $\text{天}=0$、即得 $\text{地}=\pm\text{味}$、所以弧線交縱軸之點亦有二、在原點上下、距原點皆為半徑

欲盡推弧分內之諸點、則變式爲$地=\pm\sqrt{味^{二}-天^{二}}$、凡天之每同數、俱可求得地之正負二同數、其二點至橫軸之弧線相等、設天爲正、則從$天=〇$、$地=\pm味$起、地之同數漸損、至$天=+味$、$地=〇$而止、若天大于味、則地爲虛、故弧線交正橫軸、不能過$天=+味$、交負橫軸、亦不能過$天=-味$也、

第三款、凡縱橫線之原點在圜周、其式爲$地^{二}=二味天-天^{二}$、味爲半徑、天地爲圜周任一點之縱橫線、

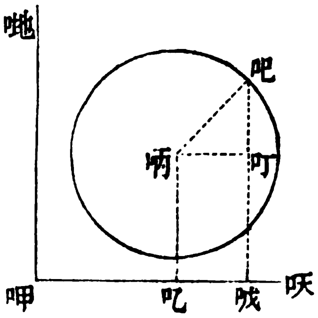
如圖、原點在圜周呷、橫軸呷叮過圜心、任取圜周吧、作呷叮之垂線吧吃、乃命呷吃爲天、吧吃爲地、呷叮爲二味、則吃叮



爲二味丅天、又別得吃吧爲呷吃吃叮之中率、故得式 吧吃^{二}=呷吃×吃叮、即 地^{二}=天(二味丅天) =二味天丅天^{二}、合款之式、欲定圜周交橫軸之點、則令 地=○、即得 天(二味丅天)=○、此式 天=○、二味丅天=○、俱合、二味丅天=○、則 天=二味、故圜周交橫軸之點有二、一在原點、一與原點距等于二味、欲定圜

周交縱軸之點、則令$天=〇$、即得$地=〇$、故圜周交縱軸之點只一、即原點也、

第三款　原點任在何處、其公式為$(天丅夭)^2\perp(地丅地)^2=咊^2$、咊為半徑、夭地為圜心點之縱橫線、天地為圜周任一點之縱橫線、



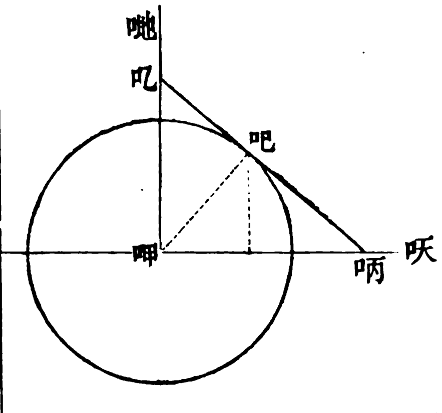
如圖、呐為圜心、任置原點呷、作呷呋呷哋二軸、命心點之縱橫線呷吃吃呐為夭地、命圜周任一點之縱橫線呷㖂㖂

吧為天地乃作半徑哂吧及呷呋平行線哂叮、則 $\frac{哂}{叮}=天丅天'$、$\frac{吧}{叮}=地丅地'$、惟 $\frac{哂^{二}}{叮}丄\frac{吧^{二}}{叮}=\frac{哂^{二}}{吧}$、所以得 $(天丅天')^{二}丄(地丅地')^{二}=昧^{二}$、即款之式、

設圜周交橫軸、欲定其交點、則令 $地=〇$、即得 $(天丅天')^{二}丄地'^{二}=昧^{二}$、故 $(天丅天')^{二}=昧^{二}丅地'^{二}$、而 $天丅天'=\pm\sqrt{昧^{二}丅地'^{二}}$ 即 $天=天'\pm\sqrt{昧^{二}丅地'^{二}}$、若地大于昧、則天為虛、故心點距橫軸、若大于半徑、則不能交、設圜周交縱軸、欲定其交點、則令 $天=〇$、即得 $地=地'\pm\sqrt{昧^{二}丅天'^{二}}$ 若天大于昧、則地為虛、而不

能交理如前、

第四款、凡圜之切線式爲天夫丄地地═味^2、味爲半徑、夫地爲切點之縱橫線、天地爲切線內任一點之縱橫線、

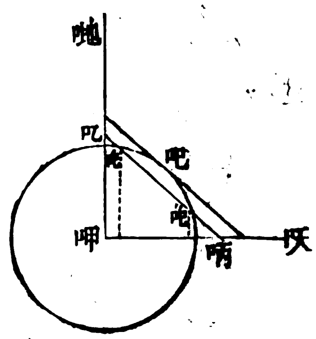


如圖、呷爲原點、在圜心、叱呐爲切線、吧爲切點、命其縱橫線爲夫地、作半徑呷吧、過原點亦過切點、所以得式、天、$\frac{夫}{地}$═地三卷四款附條凡切線必正交切點之半徑、準前論、過所設點之線、爲他線之垂線、其式爲

地丅地=丅申(天丅天)、三卷六款附條依八線理、正切等于餘弦約正弦、卽申=$\frac{天}{地}$、所以丅$\frac{申}{一}$=丅$\frac{地}{天}$、故切線之式爲地丅地=丅$\frac{地}{天}$(天丅天)、去其母、移其項、得天天丄地地=天^{二}丄地^{二}、惟吧點在圜周、則縱橫線必合前式天^{二}丄地^{二}=吠^{二}、本卷一款所以得天天丄地地=吠^{二}、爲本款式、

求切線式另有公法、一切曲線俱可用之、

如圖、先作吃哂線、交曲線于吧吧二點、命吧點之



縱橫線爲天地、吧點之縱橫線爲天地、則叱哂線之式爲

$$地丅地' = \frac{天'丅天''}{地'丅地''}(天丅天')$$

㊀、三卷四款吧吧二點俱在曲線內、故有式

$$天'^{2}丄地'^{2} = 咊^{2}$$

㊁、

$$天''^{2}丄地''^{2} = 咊^{2}$$

㊂、以㊂式減㊁式、得

$$地'^{2}丅地''^{2}丄天'^{2}丅天''^{2} = 〇$$

、即

$$(地'丄地'')(地'丅地'')丄(天'丄天'')(天'丅天'') = 〇$$

、故

$$\frac{天'丅天''}{地'丅地''} = 丅\frac{地'丄地''}{天'丄天''}$$

、前㊀式中易此右邊數、則得

$$地丅地' = 丅\frac{地'丄地''}{天'丄天''}(天丅天')$$

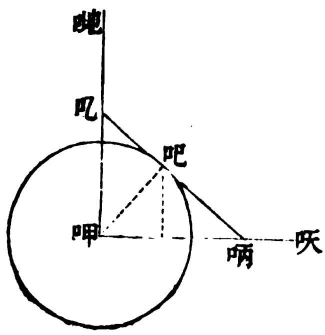
㊃、叱哂線漸移近吧點、則吧吧二點漸相近、至合

為一、則吃哂變為切線、而 $天＝天'$ $地＝地'$、(四)式變為 $地丅地'＝丅\frac{地'}{天'}(天丅天')$、與本

款式合、欲定切線交橫軸之點、必令 $地＝〇$、即得 $天天'＝咊^{二}$

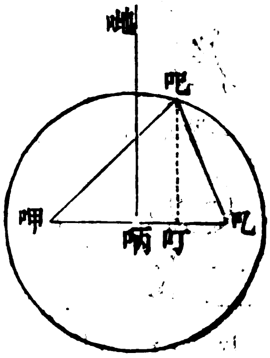
故 $天＝\frac{咊^{二}}{天'}＝呷哂$、欲定切線交縱軸之點、必令 $天＝〇$

即得 $地地'＝咊^{二}$、故 $地＝\frac{咊^{二}}{地'}＝呷吃$、



第五款、凡原點在三角形底邊之平分點、頂點式

為 $地^{二}丄天^{二}＝\frac{三}{寅}丅甲^{二}$、甲為半底邊、寅為二腰正方之和、



如圖、呷吃為三角形底邊、平分于呐、呐哋為呷吃垂線、與呐吃成正交二軸、命三角頂吧點之縱橫線呐叮叮吧為天地、呷呐呐吃俱為甲、呷吧吧吃之二正方和為寅、依幾何理得式

$$吧叮^2 \perp 呷叮^2 = 呷吧^2$$
$$吧叮^2 \perp 吃叮^2 = 吃吧^2、$$

即

$$地^2 \perp (天 \perp 甲)^2 = 呷吧^2$$
$$地^2 \perp (天 \top 甲)^2 = 吃吧^2、$$

二式并之得

$$二地^2 \perp 二天^2 \perp 二甲^2 = 呷吧^2 \perp 吃吧^2 = 寅、$$

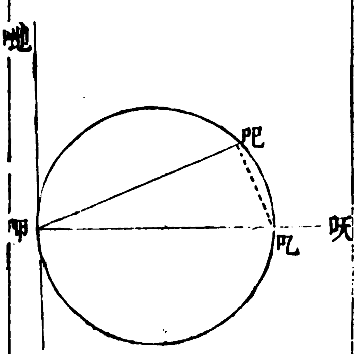
故

$$地^2 \perp 天^2 = \frac{寅}{二} \top 甲^2、$$

合前款觀之、本卷一款知此式乃原點在心之圜線式、其半徑等于 $\sqrt{\frac{寅}{二} \top 甲^2}$、若以呐為心任作圜周、從

呷叱二點任至圜周之一點作二線成三角形皆與款合、

第六款、凡原點在圜周、圜之極式爲 $未＝二味亥餘弦$、味爲半徑、未爲帶徑、亥爲變角、



如圖、呷爲原點、卽極點、呷呹爲角之一界、呷吧爲帶徑、吧呷呹爲變角、準前凡正交二軸、原點在圜周、其式必爲 $地^{二}＝二味天丅天^{二}$ ㊀、本卷二款 凡準正交縱橫線易爲準極角距、卷三

十一款附條 其式為 $天＝未亥餘弦$ $地＝未亥弦$、二式左右各自乘、用所得$天^{二}地^{二}$二同數及天之同數、代㈠式中$天^{二}$$地^{二}$天、則得 $未^{二}亥弦^{二}＝二味未亥餘弦丅未^{二}亥餘弦^{二}$ 移其項、得 $未^{二}(亥弦^{二}丄亥餘弦^{二})＝二味未亥餘弦$、惟 $亥弦^{二}丄亥餘弦^{二}＝一$、所以 $未^{二}＝二味未亥餘弦$、以未約之、得 $未＝二味亥餘弦$、與款式合、又依三角法、有比例、 呷吧：叱呷吧餘弦∷呷叱：半徑 即 未：亥餘弦∷二味：一、故得 $未＝二味亥餘弦$、亦合、

若亥＝〇、則亥餘弦＝一、而得未＝二昧＝呷吃、亥從〇起、漸增至九十度、則帶徑盡定半周線內諸點、若亥＝九〇度、則亥餘弦＝〇、而得未＝〇、自亥＝二七〇度起、至亥＝三六〇度、則帶徑盡定餘半周諸點、

代微積拾級卷五

米利堅羅密士譔

英國　偉烈亞力　口譯

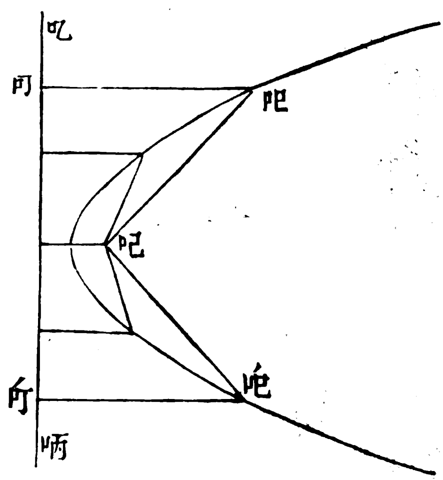
海甯　李善蘭　筆述

代數幾何五

論拋物線

拋物線爲圜錐曲線之一、設一定點、一直線、拋物線之每點、距定點與距直線恒等、定點卽拋物線之心、直線名曰準線、

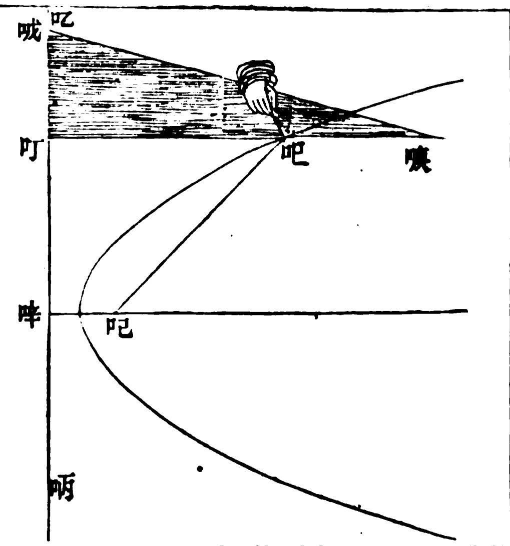
如圖、吧爲定點、叱哂爲直線、吧點繞吧點成拋物



線、吧點所至之處、距𠯆點及叱吶線恒等、如吧𠯆等于吧叮、咆𠯆等于咆吁、是也、𠯆即心點、叱吶為準線、凡曲線每點距心之線、即帶徑也、

依此理、拋物線可以器作之、　如圖、叱吶為界尺、置平面上、哦叮咦為矩尺、取一線與叮咦等長、一端著于矩尺之咦點、一端著于平面𠯆點、矩尺之叮哦邊、恒緊貼界尺叱吶、而叮咦邊初與軸線𠯆

哷合吧點在拋物線頂，用鉛筆緊逼吧點，令不離



叮噢，乃漸移矩尺向吃點，吧點即行成拋物線，吧點即曲線心，界尺吃哂即準線，蓋矩尺貼吃哂而移，任至何處，必得吧噢丄吧叮＝吧噢亅吧吧、所以吧叮＝吧吧、故吧點距心與準線恒等，又反置矩尺于軸線吧哷下，成下邊之曲線，與上相對，

曲線內每點作線，背準線行，其方向正交準線，爲徑，

徑與曲線交點、爲徑頂點

過心之徑爲軸線、

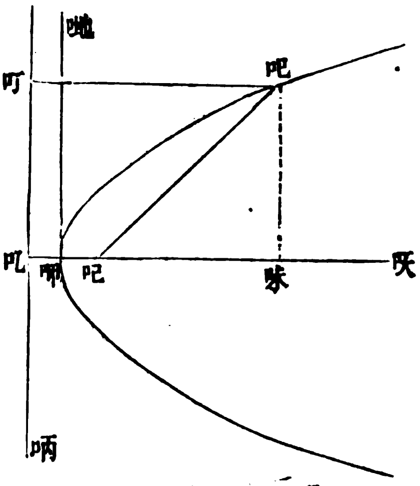
徑上過心之倍縱線、爲通徑、

第一款 凡正交二軸、原點在拋物線之頂、其式爲

地$^{\text{二}}$＝二巳天、

天地爲曲線任一點之縱橫線、二巳爲軸線之通徑、

如圖、叱爲曲線心、叮哂爲準線、呷吠爲橫軸、原點在呷、平分叱叱、命叱叱爲巳、則呷叱等于$\frac{\text{巳}}{\text{二}}$、曲線



內任取吧點、命其縱橫線呷咪咪吧為天地、命帶徑吧吧為未、準前論得式 $\frac{吧}{吧}=\frac{吧}{叮}=\frac{呷}{咪}丄\frac{呷}{叱}=天丄\frac{二}{巳}$、而 $咪=天丅\frac{二}{巳}$、惟 $\frac{呷^{二}}{咪}丄\frac{吧^{二}}{咪}=\frac{吧^{二}}{吧}$、即 $地^{二}丄(天丅\frac{二}{巳})^{二}=(天丄\frac{二}{巳})^{二}$、故詳之移其位、則得 $地^{二}=二巳天$、與款合、

一系設 $天=〇$、則 $地=〇$、得曲線頂點、設 $天=\frac{二}{巳}$、則 $地^{二}=巳^{二}$、即 $地=巳$、亦即 $二地=巳^{二}$、二巳為常數、即通徑、故云、徑線上過心之倍縱線為通徑也、本卷總論末條

二系、準拋物線式、得 $地=\pm\sqrt{二巳天}$、故知橫軸每點上下必有相等二縱線、正負異、所以拋物線以呎線為軸、其兩邊必等、

三系、設拋物線式 $地^{二}=二巳天$ 改為比例四率、得 $天:地::地:二巳$ 故曲線軸之通徑、恒為橫線縱線連比例之三率、

四系、凡縱線之平方、與橫線有比例、命二縱線為地′地″二橫線為天′天″、則得

$$地'^{二}=二巳天'$$

$$地''^{二}=二巳天''$$、

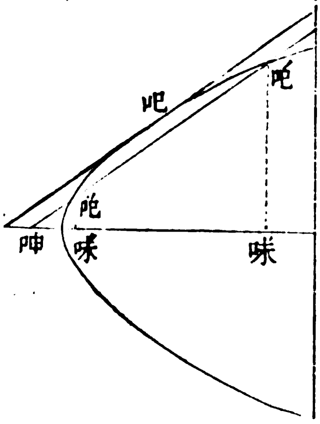
故有比例率如下、

$地^2:地'^2::二己天:二己天'::天:天'$、

第二款、拋物線之切線式爲

$地地'=己(天+天')$、

夫地爲切點之縱橫線、巳爲曲線軸之半通徑、



如圖、任作吧吧線、交曲線于吧吧二點、此線向吧點漸移、吧吧二點必漸近、至合爲一點、則吧吧線變

爲切線命吧點之縱橫線爲天地吧點之縱橫線爲天地過此二點之線式爲$地-地' = \frac{地'-地''}{天'-天''}(天-天')$㊀、三卷四款此乃凡直線過二點之公式不獨割拋物線爲然也若欲作割拋物線之直線式必求$\frac{地'-地''}{天'-天''}$之同數用于㊀式中而曲線之吧吧二點有式$地'^2 = 2巳天'$㊁、$地''^2 = 2巳天''$㊂、以㊂式減㊁式得$地'^2-地''^2 = 2巳(天'-天'')$、故$\frac{地'-地''}{天'-天''} = \frac{2巳}{地'-地''}$、用此右邊數代㊀式中$\frac{地'-地''}{天'-天''}$、則吧吧線

式變爲 $地丅地'=\frac{地'丄地''}{二巳}(天丅天')$ ㊃、若吧吧二點合爲一、則割線變爲切線、而 $天=天'$ $地=地'$、故㊃式變爲 $地丅地'=\frac{地'}{巳}(天丅天')$、即吧點切線之式、去其分母、得 $地地'丅地'^{二}=巳天丅巳天'$、惟 $地'^{二}=二巳天'$、所以 $地地'=巳天丅巳天'丄二巳天'$、即 $地地'=巳(天丄天')$、與款合、

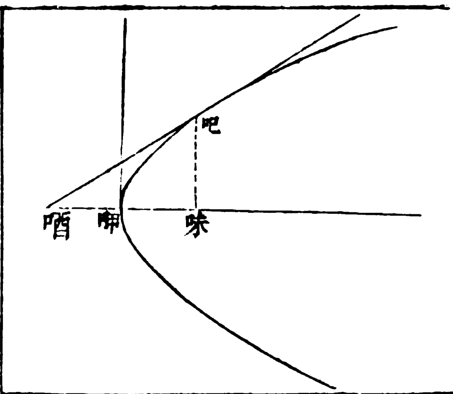
界說三則

切點縱線及切線二交軸點之距線、爲次切線、

求切線交橫軸點、法令切線式中 $地=〇$、則得 $〇=巳(天丄天')$、故 $天=丅天'$、

卽$呷哂 = 丅呷味$、所以次切線平分于頂點、

準此理、可任作曲線各點之切線、設取吧點作曲線軸之垂線吧味、次取呷哂、等于呷味、乃作吧哂線、卽吧點之切線也、



案、前所得$地\,丅\,地' = \frac{地'}{巳}(天\,丅\,天')$式中$\frac{地'}{巳}$、乃切線與軸交角之正切也、

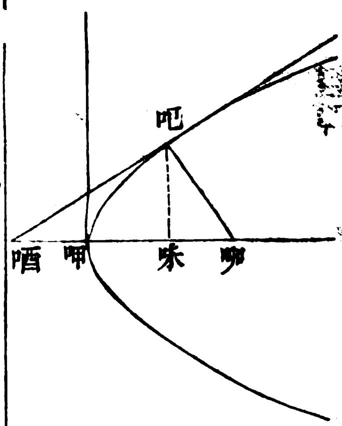
自切點至軸作切線之垂線、爲法線、

切點縱線及法線二交軸點之距線、爲次法線、

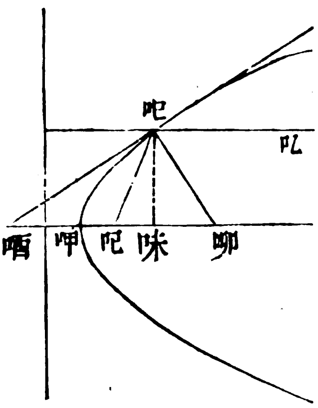
第三款、拋物線之法線式為 $地丅地'=丅\frac{巳}{地'}(天丅天')$、天地為切點之縱橫線、

凡直線過所設點之式為 $地丅地'=甲(天丅天')$ ㈠、三卷三款、法線為切線之垂線、則得 $甲=丅\frac{甲'}{一}$、三卷六款附條、準前切線與軸交角之正切式為 $甲'=\frac{地'}{巳}$、界說一、則案故 $甲=丅\frac{巳}{地'}$、以此同數代㈠式之甲、則得 $地丅地'=丅\frac{巳}{地'}(天丅天')$、卽法線之式、與款合、

系、求法線交橫軸點、令法線式中 地＝〇、則得 天丅矢＝巳、惟 天＝呷哪 矢＝呷味、所以 天丅矢＝巳＝味哪、即次法線、故次法線爲常數、恒等于曲線軸之半通徑、



第四款、凡抛物線之法線、平分切點上徑與帶徑二線之交角、



如圖、吧唒爲抛物線之切線、吧爲切點、吧吧爲帶徑、吧哪爲法線、吧吃爲切點之徑線、吧哪平分吧吧吃角、命

吧點之橫線爲天則$\frac{呷}{味}=天$、又$\frac{味}{唎}=巳$、本卷三款系$\frac{呷}{吧}=\frac{二}{巳}$、本卷一款一系別

得$\frac{吧}{唎}=\frac{呷}{味}丄\frac{味}{唎}丅\frac{呷}{吧}$、卽$\frac{吧}{唎}=天丄巳丅\frac{二}{巳}=天丄\frac{二}{巳}$、準前$\frac{吧}{吧}=天丄\frac{二}{巳}$、本卷一款解故$\frac{吧}{唎}=\frac{吧}{吧}$、所以吧吧唎角等

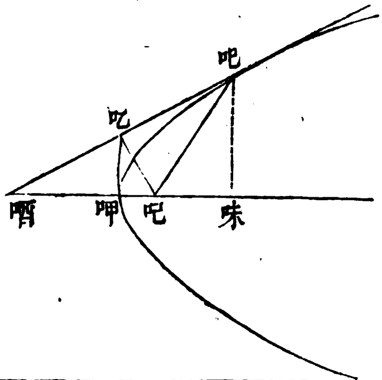
于吧唎吧角、亦等于其互角叱吧唎也、

系、$\frac{吧}{味}=\frac{呷}{味}丅\frac{哂}{吧}=天丅\frac{二}{巳}$而$\frac{哂}{味}=二天$、界說一則所以$\frac{哂}{吧}=\frac{哂}{味}丅\frac{吧}{味}=天丄\frac{二}{巳}=\frac{吧}{吧}$、故拋物線之心距切點與

距切線交軸點等、

第五款、從心作切線之垂線、爲心至頂點及至切

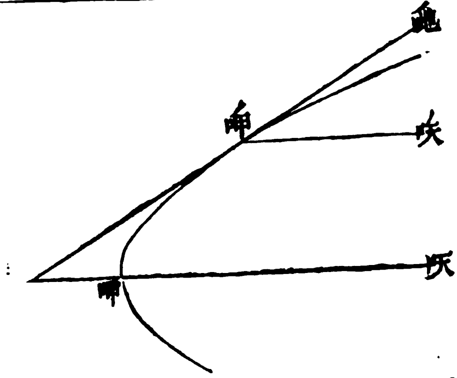
點二線之中率、



如圖、吧爲心點、作切線之垂線吧吃、又作呷吃及縱線吧咮、吧哂既等于吧吧、四款系而吧吃爲吧哂之垂線、則吧吃必等于吃哂、又咮呷等于呷哂、界說一則附條故有比例呷咮．哂呷．．吃吧．哂吃、故呷吃與吧咮必平行、惟吧咮爲曲線軸之垂線、故呷吃必正交哂吧、而吧呷吃吧吃哂爲相似三角形、有比例吧哂．吧吃．．吧吃．吧卯、所以吧吃爲吧呷吧哂

之中率、

第六款、以切點爲原點、切點之徑與切線爲斜交二軸、其式爲 地²＝二巳天 二巳爲過切點徑之通徑、



如圖、以切點呻爲原點、呻呋呻哋爲斜交二軸、凡正交二軸易爲斜交二軸并易原點、其式爲

天＝甲丄夭角餘弦丄地角餘弦 ㈠、

地＝乙丄夭角弦丄地角弦 ㈡、三卷十款附條 新原點在曲線內、則其縱橫線必合曲線式而爲 乙²＝二巳甲、即

$甲=\frac{二巳}{乙}$、又凡徑皆與曲線軸平行、則式中之角必爲○、

所以$角弦=○$、$角餘弦=一$、又切線交軸角之正切爲$\frac{地}{巳}$、界說一所則案

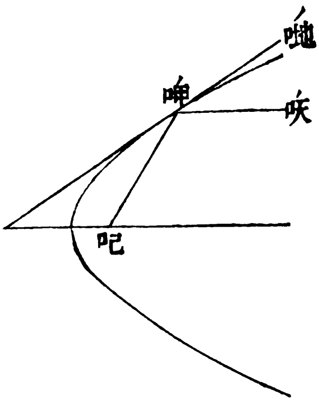
以$\frac{地}{巳}=\frac{乙}{巳}=角切=\frac{角餘弦}{角弦}$、故$角餘弦=\frac{巳}{乙角弦}$、用此諸同數于㊀㊂二式中、得$天=\frac{二巳}{乙}丄天丄\frac{巳}{乙地角弦}$、$地=乙丄地角弦$、又

用此二同數于拋物線公式$地^{二}=二巳天$中、得$乙^{二}丄二乙地角弦丄地^{二}角弦^{二}=二巳^{二}丄二巳天丄二乙地角弦$、卽爲$地^{二}=\frac{角弦^{二}}{二巳天}$、

設取$巳=\frac{角弦^{二}}{巳}$、去地之ノ則得$地^{二}=二巳天$、與款式合、而$二巳$爲呷吠

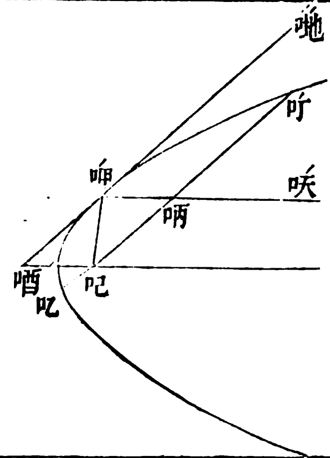
徑之通徑、本卷七款案 準款凡徑上縱線之正方與其橫線有比例、設命二縱線爲地地′二橫線爲天天′、則 $地^{2}=二巳天$、$地'^{2}=二巳天'$、即得 $地^{2}:地'^{2}::二巳天:二巳天'::天:天'$

第七款、凡徑之通徑、四倍徑頂距心線、



準上 $\frac{乙}{巳}=\frac{角餘弦}{角弦}$、本卷六款論 所以 $乙角弦=巳角餘弦$、而 $乙^{2}角弦^{2}=巳^{2}角餘弦^{2}$ $=巳^{2}(一丅角弦^{2})$ $=巳^{2}丅巳^{2}角弦^{2}$、故 $角弦^{2}=\frac{乙^{2}丄巳^{2}}{巳^{2}}$、惟準式 $乙^{2}=二甲巳$、故 $角弦^{2}=\frac{二甲巳丄巳^{2}}{巳^{2}}$ $=\frac{二甲丄巳}{巳}$、取巳等于 $\frac{角弦^{2}}{巳}$、本卷

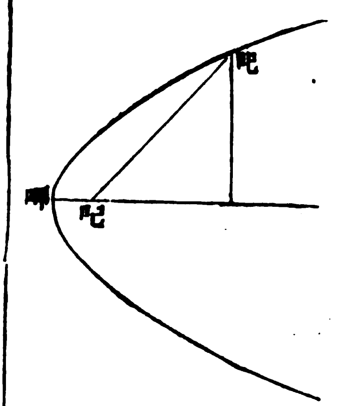
六款則㐌＝二甲丄巳　二㐌＝四（甲丄$\frac{二}{㐌}$）、惟甲丄$\frac{二}{㐌}$＝呷叱、所以二㐌＝四呷叱、卽呷呋徑之通徑、



案、若過心作叱叮線、與切線哂呷平行、命叮點之縱橫線為天地、則天＝呷呐＝哂叱＝呷叱＝$\frac{二}{㐌}$、本卷四款系又本款論又

又地^{二}＝二㐌天、本卷六款所以地^{二}＝二㐌乂$\frac{二}{㐌}$＝㐌、卽地＝㐌　二地＝二㐌、故呷呋之通徑二㐌、等于過心之倍縱線二地、與總論合、

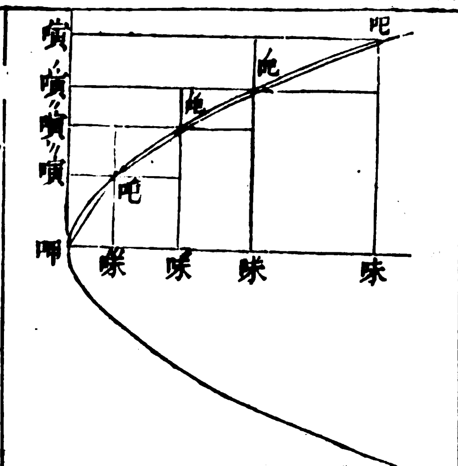
第八款、凡曲線心爲極、拋物線之極式爲 $未=\frac{巳}{一丄亥餘弦}$、巳爲半通徑、亥爲帶徑交軸之角、



凡拋物線任一點之距心線爲 $未=呬吧=天丄\frac{巳}{二}$、橫線本從頂點呷起、今原點從呷移至吧、則當以 $矢丄\frac{巳}{二}$ 代天、故 $未=矢丄巳$、命呬吧呷角爲亥、依三角理得 $矢=丅未亥餘弦$、所以 $未=巳丅未亥餘弦$、即 $未=\frac{巳}{一丄亥餘弦}$、亥角從頂點呷起向右度之、善蘭案、此圖亥爲鈍角、則餘弦爲負、以未乘之則得正、而其數作丄號、實

減也後凡用鈍角俱仿此

第九款、凡截拋物線一段面積、等于縱橫線所成矩形三分之二、



如圖、呷吧味為拋物線一段面積、以橫軸呷味縱線吧味為界、作呷嗊吧味矩形、則此面積為矩形三分之二、試于曲線裏作吧吧吧吧呷味多邊形、與呷味吧味二線平行作吧嗊吧咮諸線、成吧味吧咮等線裏之矩形、及吧嗊吧嗊等線外之矩

形命線裏諸形為吧咆吧等、線外諸形為巳巳巳巳等、諸縱橫線為天地夭地等、則得$\frac{\text{咊}}{\text{咊}}=\frac{\text{咊}}{\text{咊}}\times\frac{\text{咊}}{\text{咊}}$、即$\text{吧}=\text{地}(\text{天}\,丅\,\text{夭})$、又

$\frac{\text{吧}}{\text{嗩}}=\frac{\text{吧}}{\text{嗩}}\times\frac{\text{嗩}}{\text{嗩}}$即$\text{巳}=\text{夭}(\text{地}\,丅\,\text{地})$、故$\frac{\text{巳}}{\text{吧}}=\frac{\text{夭}(\text{地}\,丅\,\text{地})}{\text{地}(\text{天}\,丅\,\text{夭})}$㊀、吧咆諸點皆在曲線內、故得$\text{地}=\text{二巳天}$$\text{地}=\text{二巳夭}$、

所以$\text{天}\,丅\,\text{夭}=\frac{\text{二巳}}{\text{地}\,丅\,\text{地}}$$\text{夭}=\frac{\text{二巳}}{\text{地}}$、用此二同數于㊀式中、則得$\frac{\text{巳}}{\text{吧}}=\frac{\text{地}(\text{地}\,丅\,\text{地})}{\text{地}(\text{地}\,丅\,\text{地})}=\frac{\text{地}}{\text{地}\,丄\,\text{地}}=\text{一}\,丄\,\frac{\text{地}}{\text{地}}$、同例

推得$\frac{\text{巳}}{\text{吧}}=\text{一}\,丄\,\frac{\text{地}}{\text{地}}$$\frac{\text{巳}}{\text{咆}}=\text{一}\,丄\,\frac{\text{地}}{\text{地}}$、若令吧咆咆諸點之縱線皆成連比例、

則得$\frac{地}{地}=\frac{地'}{地'}=\frac{地''}{地''}\cdots$而各線裏矩形與所對線外矩形之比、皆若$一丄\frac{地}{地}$與一之比、故依合理得$\frac{巳丄巳'丄巳''\cdots}{吧丄吧'丄吧''\cdots}=一丄\frac{地}{地}$、卽線裏諸矩形和積與線外諸矩形和積之比、若$一丄\frac{地}{地}$與一之比、吧吧吧諸點相距愈近、則線裏諸矩形和積愈近于曲線面積、而地愈近于地、幾欲相等、故命呷吧咮面爲呻、呷嗔吧面爲申、則得$\frac{申}{呻}=一丄一=二$、而$\frac{申}{呻丄申}=三$、所以$呻=\frac{一}{三}(呻丄申)$、

呻丄申

卽呷

噴吧味矩形故截拋物線一段面積等于外切矩形三分之二

[illegible]

代微積拾級卷六

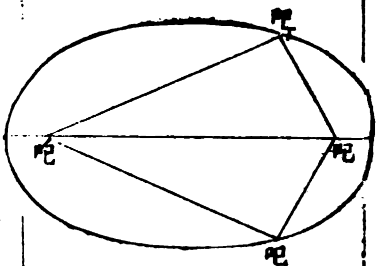
米利堅羅密士譔
英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

代數幾何六

論橢圜

橢圜、亦圜錐曲線之一、平面曲線也、周之各點、距二定點之和恒等、二定點乃曲線之二心、

如圖、叱叱為二定點、設吧點繞叱點、任至何處、距叱叱二點之和恒等、卽成橢圜、以叱叱為二心、吧



點距二心之線、俱爲帶徑、　依此理、橢圜可以法作之、法用一線、必長于吧吧二心之距、以二端著于二心、以鉛筆于吧點逼線、令直、乃繞二心一周、卽成橢圜、

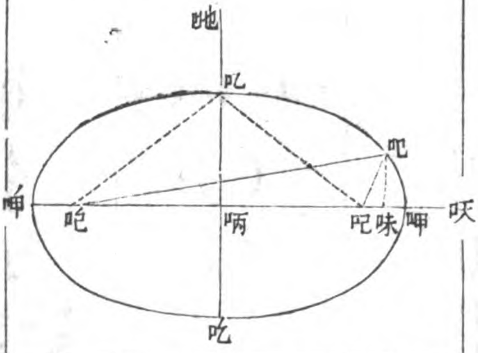
平分二心距之點爲中點、

過中點、兩端抵橢圜周之線、爲徑、

過二心之徑曰長徑、亦曰長軸、正交長徑之徑曰短徑、亦曰短軸、

過心之倍縱線、爲長軸之通徑、

第一款 以中點爲原點、長短二徑爲縱橫二軸、撱圜之式爲 $呷^{二}地^{二}\perp吃^{二}天^{二}=呷^{二}吃^{二}$、呷吃爲長短二半徑、天地爲曲線任一點之縱橫線、



如圖、叱吔爲二心、取叱吔之中點呐爲原點、作呐呋呐呲二軸線、任取曲線內一點吧、作呐呋之垂線吧味、命吧距二心之和爲二呷、呐叱或呐吔爲丙、叱吧爲未、吔吧爲未、吧點之縱橫線、呐味爲天、吧味爲地、

則有式 $\frac{\text{吒}^{2}}{\text{吒}}=\frac{\text{吒}^{2}}{\text{咊}}\perp\frac{\text{咊}^{2}}{\text{吒}}$、即 $\text{未}^{2}=\text{地}^{2}\perp(\text{天}\,\text{丅}\,\text{丙})^{2}$ ㊀、$\frac{\text{吒}^{2}}{\text{吒}}=\frac{\text{吒}^{2}}{\text{咊}}\perp\frac{\text{咊}^{2}}{\text{吒}}$ 即 $\text{朱}^{2}=\text{地}^{2}\perp(\text{天}\perp\text{丙})^{2}$ ㊁、以㊀式加㊁式、則得 $\text{未}^{2}\perp\text{朱}^{2}=\text{二}(\text{地}^{2}\perp\text{天}^{2}\perp\text{丙}^{2})$ ㊂、以㊀式減㊁式、則得 $\text{朱}^{2}\,\text{丅}\,\text{未}^{2}=\text{四丙天}$、變作 $(\text{朱}\perp\text{未})(\text{朱}\,\text{丅}\,\text{未})=\text{四丙天}$ ㊃、準總論得 $\text{朱}\perp\text{未}=\text{二呷}$、用此同數于㊃式中、得 $\text{朱}\,\text{丅}\,\text{未}=\frac{\text{呷}}{\text{二丙天}}$、以加上式、折半、得 $\text{朱}=\text{呷}\perp\frac{\text{呷}}{\text{丙天}}$ ㊄、以減上式、折半得 $\text{未}=\text{呷}\,\text{丅}\,\frac{\text{呷}}{\text{四丙天}}$ ㊅、以㊄㊅式二同數各自乘、用于㊂式中、則得下式 $\text{呷}^{2}\perp\frac{\text{呷}^{2}}{\text{丙}^{2}\text{天}^{2}}=\text{地}^{2}\perp\text{天}^{2}\perp\text{丙}^{2}$、去其分母、得 $\text{呷}^{2}\text{地}^{2}\perp(\text{呷}^{2}\,\text{丅}\,\text{丙}^{2})\text{天}^{2}=\text{呷}^{2}(\text{呷}^{2}\,\text{丅}\,\text{丙}^{2})$ ㊆、

即橢圜式、試命半短徑𠮙⿰口丙為𠮙、夫𠮙⿰口丙⿰口己𠮙⿰口丙⿰口巳二句股形之⿰口丙⿰口己⿰口丙⿰口巳二邊既等、而𠮙⿰口丙為公邊、所以𠮙⿰口己等于𠮙⿰口巳、準總論 𠮙⿰口己丄𠮙⿰口巳＝二呷、故 𠮙⿰口己＝呷、準句股理、

$\frac{𠮙^{二}}{⿰口丙}＝\frac{𠮙^{二}}{⿰口己}丅\frac{⿰口己^{二}}{⿰口丙}$ 即 𠮙二＝呷二丅丙二、

㊇、用此左邊數代㊆式中 呷二丅丙二、即得 呷二地二丄𠮙二天二＝呷二𠮙二、與款合、

案、若移款式之項、以呷二約之、則得 $地^{二}＝\frac{呷^{二}}{𠮙^{二}}(呷^{二}丅天^{二})$、

一系、求曲線交橫軸之點、則令 地＝〇、即得 天＝$\pm$呷、即呷呐

亦即呷呻、故曲線交橫軸爲呷呻二點、在原點左右距原點相等、而二呐呷即呷呻、等于$二呷$、故撱圜周任一點距二心之和恒等于長徑、

二系若 $天=〇$、則 $地=\pm叱$、即呐叱、亦即呐吃、故曲線交縱軸在叱吃二點、距原點相等、

三系設 $叱=呷$、則式變爲 $呷^{2}=天^{2}+地^{2}$、即平圜式、故撱圜之長短二徑相等、即變爲平圜、

四系、叱吃既等于叱呝、則亦等于呷、所以心距短

徑之端、等于半長徑、

五系、準本款案 $地^2=\frac{甲^2}{乙^2}(甲^2-天^2)$、設 $天=\frac{丙}{乙}=丙$、則 $地^2=\frac{甲^2}{乙^2}(甲^2-丙^2)$、又準本款八式 $甲^2-丙^2=乙^2$、故 $地^2=\frac{甲^2}{乙^2}\times乙^2$、則有比例 $甲:乙::乙:地$、即 $二甲:二乙::二乙:二地$、二地為過心之倍縱線、即長徑之通徑、本卷總論故長徑之通徑、為長短二徑連比例之末率

六系、中點距心點線、以半長徑約之、得 $\frac{甲}{丙}$、為𢕟率、以戊代之、得 $\frac{甲}{丙}=戊$、即 $丙=甲戊$、惟 $丙^2=甲^2-乙^2$、所以 $甲^2-乙^2=甲^2戊^2$、即 $\frac{乙^2}{甲^2}=一-戊^2$、用此同數

于撱圜式中、得$\text{地}^{\text{二}}=(\text{一}\,\text{丅}\,\text{戊}^{\text{二}})(\text{呷}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})$、

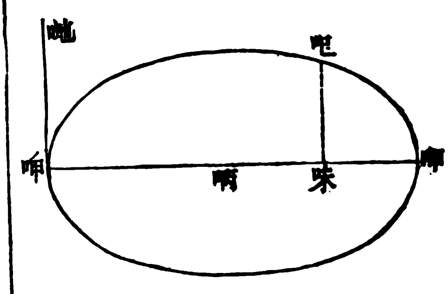
七系、本款㊄㊅二式為$\text{未}=\text{呷}\,\text{丄}\,\frac{\text{呷}}{\text{丙天}}$ $\text{未}=\text{呷}\,\text{丅}\,\frac{\text{呷}}{\text{丙天}}$、式中俱用戊代$\frac{\text{呷}}{\text{丙}}$、則

變為$\text{未}=\text{呷}\,\text{丄}\,\text{戊天}$ $\text{未}=\text{呷}\,\text{丅}\,\text{戊天}$、乃撱圜周任一點距二心之式、相乘得

$\text{未糸}=\text{呷}^{\text{二}}\,\text{丅}\,\text{戊}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}$、為距二心線相乘之式、

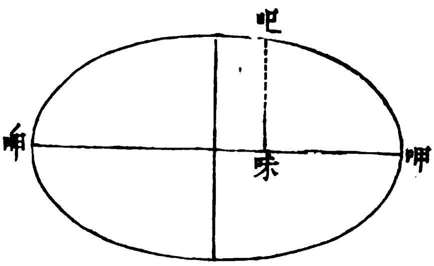
第二款　原點在撱圜長徑之端、其式為$\text{地}^{\text{二}}=\frac{\text{呷}^{\text{二}}}{\text{吃}^{\text{二}}}(\text{二呷天}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})$、呷吃為

長短二半徑、天地為曲線內任一點之縱橫線、



原點在中點、其式爲$丙^2地^2丄叱^2天^2=丙^2叱^2$㊀、本卷一款 移原點于呷、則縱線仍同、而橫線異、命新橫線爲夭、則得$\frac{丙}{味}=\frac{呷}{味}丁\frac{呷}{丙}$、即$天=夭丁呷$、用此同數于㊀式中、得$呷^2地^2丄叱^2夭^2丁二呷叱^2夭=〇$、變作$地^2=\frac{呷^2}{叱^2}(二呷夭丁夭^2)$、以天代夭、則得$地^2=\frac{呷^2}{叱^2}(二呷天丁天^2)$、與款合、

第三款 凡縱線之正方與所分長徑二分之矩形比、若短徑之正方、與長徑之正方比、

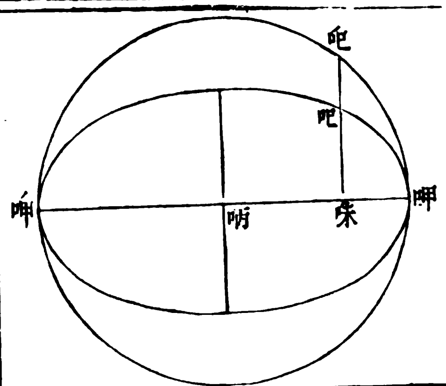


原點在呻、其式爲$地^{二}一\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(二呷丅天)天$、本卷二款此式可列爲比例率$地^{二}∶(二呷丅天)天∷叱^{二}∶呷^{二}$、二呷即呷呻、天即呻味、故二呷丅天即呷味、所以(二呷丅天)天即縱線吧味所分長徑二分之矩積、

一系、凡長徑上二縱線之正方比、若縱線所分長徑各二分之矩形比、

二系、凡短徑上二縱線之正方比、若縱線所分短徑各二分之矩形比、

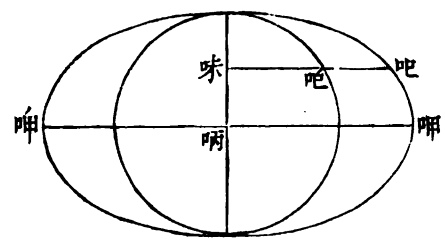
第四款　于撱圜長徑上作一平圜、則同橫線平圜之縱線與撱圜之縱線比、若長徑與短徑比、



如圖、吧味爲撱圜之縱線、命爲地、吧味爲平圜之縱線、命爲吔、其橫線同爲呐味、則撱圜式爲$地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(呷^{二}丅天^{二})$、本卷一款案平圜式爲$吔^{二}=呷^{二}丅天^{二}$、二式相消、得$地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}吔^{二}$、即$地=\frac{呷}{吃}吔$、故有比例$吔:地::呷:吃$ $::^{二}呷:^{二}吃$、與四卷一款合、

系、若撱圜之短徑上作平圜、則同橫線撱圜之縱

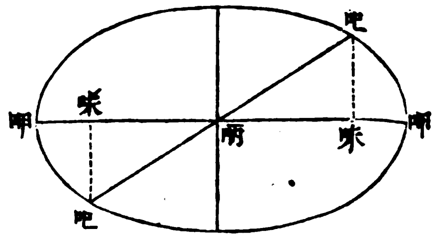
線與平圜之縱線比、若長徑與短徑比、



如圖、吧味爲橢圜縱線、命爲天、吧味爲平圜縱線、命爲呋、俱以味㖠爲橫線、則得 $天^{2}=\frac{吧^{2}}{呷^{2}}(吧^{2}丅地^{2})$、本卷一款案 $呋^{2}=吧^{2}丅地^{2}$、四卷一款 二式相消得 $天^{2}=\frac{吧^{2}}{呷^{2}}呋^{2}$、即 $天=\frac{吧}{呷}呋$、所以有比例 $天:呋::呷:吧::二呷:二吧$、

第五款　凡橢圜之諸徑皆平分于中點、

如圖、吧吔爲橢圜之斜徑、命吧點之縱橫線爲天



地、吧點之縱橫線為天地、準橢圜式得

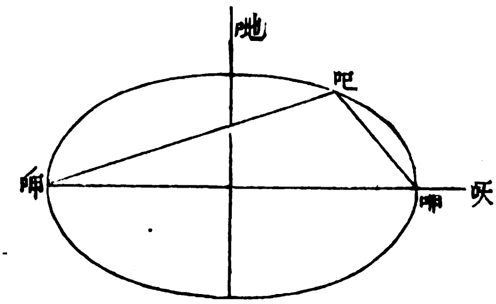
$\text{地}^2=\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}(\text{呷}^2\,丅\,\text{天}^2)$

$\text{地}'^2=\frac{\text{呷}^2}{\text{叱}^2}(\text{呷}^2\,丅\,\text{天}'^2)$、

本卷款案一故 $\frac{\text{地}'^2}{\text{地}^2}=\frac{\text{呷}^2\,丅\,\text{天}'^2}{\text{呷}^2\,丅\,\text{天}^2}$、吧呐咊吧呐咊為相似三角形、故 $\frac{\text{地}'}{\text{地}}=\frac{\text{天}'}{\text{天}}$、則 $\frac{\text{天}'^2}{\text{天}^2}=\frac{\text{呷}^2\,丅\,\text{天}'^2}{\text{呷}^2\,丅\,\text{天}^2}$、去其分、則得 $\text{天}^2=\text{天}'^2$、故 $\text{地}=\text{地}'$、而 $\text{天}^2\,丄\,\text{地}^2=\text{天}'^2\,丄\,\text{地}'^2$ 即 $\frac{\text{呐}^2}{\text{吧}}=\frac{\text{呐}'^2}{\text{吧}'}$、亦即 $\frac{\text{呐}}{\text{吧}}=\frac{\text{呐}'}{\text{吧}'}$、與款合、

第六款　凡自長徑二端同至橢圜周任一點、其二距線與長徑交角之二正切相乘冪為負、等于長

短半徑之二正方相約數、



如圖、呷點之縱橫線爲 $矢=呷$ $地=〇$、故呷吧線之式爲 $地=甲(天丅呷)$、三卷三款 呷點之縱橫線爲 $矢=丅呷$ $地=〇$、故呷吧線之式爲 $地=申(天丄呷)$、三卷三款 二線既相交、則二式必相合、又交點在橢圜周、則亦與橢圜之式通、故以二式相乘、得 $地^{二}=甲申(天^{二}丅呷^{二})$、與交點之橢圜式 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(呷^{二}丅天^{二})$ 即

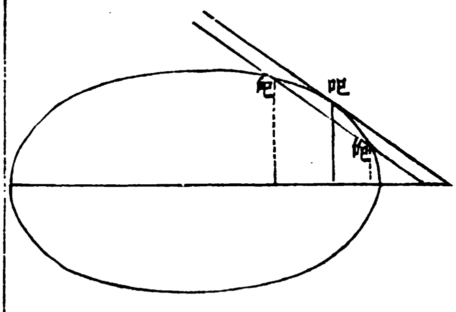
$地^{二}\top\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(天^{二}\top呷^{二})$ 相消、得 $呷呷=\top\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、與款合、

案、凡徑二端至曲線內任一點之二線、名正餘二通弦、

系、若撱圓變爲平圓、長短二徑相等、則 $呷呷=\top一$、而正餘二通弦必成直角、三卷六款附條

第七款　撱圓之切線式爲 $呷^{二}地地^{二}\perp叱^{二}天天^{二}=呷^{二}叱^{二}$、天地爲切線任一點

之縱橫線、天地爲切點之縱橫線、



如圖、任作吔吔、爲切線之平行線、交曲線于吔吔二點、此線若向吔點漸移、則吔吔二點漸近、至合于吔點、則此線變爲切線、命吔點之縱橫線爲天地、吔點之縱橫線爲天地、則過吔吔二點之線式爲

$$地\text{丅}地=\frac{天\text{丅}天}{地\text{丅}地}(天\text{丅}天)$$

（一）

三卷四款吔吔二點俱在橢圜周、故得

$$呷^{2}地^{2}\text{丄}叱^{2}天^{2}=呷^{2}叱^{2}$$

（二）、

$$呷^{2}地^{2}\text{丄}叱^{2}天^{2}=呷^{2}叱^{2}$$

（三）、本卷一款

以㊂式減㊁式、得 $呷^{2}(地^{2}丅地'^{2})⊥吃^{2}(天^{2}丅天'^{2})=〇$、即 $呷^{2}(地丅地')(地⊥地')=丅吃^{2}(天丅天')(天⊥天')$ 故 $\frac{天丅天'}{地丅地'}=丅\frac{呷^{2}}{吃^{2}}\left(\frac{地⊥地'}{天⊥天'}\right)$、用此同數于㊀式中、得 $地丅地'=丅\frac{呷^{2}}{吃^{2}}\frac{地⊥地'}{天⊥天'}(天丅天')$、㊃、若吧吧二點合為一、吧吧線變為切線、而 $天=天'$ $地=地'$、則㊃式變為 $地丅地'=丅\frac{呷^{2}}{吃^{2}}\frac{地}{天}(天丅天')$、即吧點切線之式、去其分數、則得 $呷^{2}地地'丅呷^{2}地^{2}=丅吃^{2}天天'⊥吃^{2}天^{2}$ 即 $吃^{2}天天'⊥呷^{2}地地'=呷^{2}地^{2}⊥吃^{2}天^{2}$ 準前款得 $吃^{2}天天'⊥呷^{2}地地'=呷^{2}吃^{2}$、本卷一款與款合

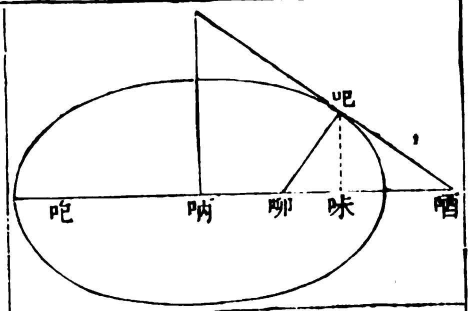
各二端作四切線、必成容橢圓之平行邊形、

第八款　橢圓之法線式爲 $地丅地=\frac{吒^{2}天}{呷^{2}地}(天丅天)$、天地爲法線任一點之縱橫線、天地爲切點之縱橫線、

凡過所設點之直線式爲 $地丅地=甲(天丅天)$ (一)、三卷三款 法線正交切線、故得 $甲=\frac{丅申}{一}$、三卷六款附條 切線交長徑角之正切式爲 $申=丅\frac{呷^{2}地}{吒^{2}天}$、本卷七款一系 故 $甲=\frac{吒^{2}天}{呷^{2}地}$、用此同數于(一)式中、則得 $地丅地=\frac{吒^{2}天}{呷^{2}地}(天丅天)$、卽法線

式與款合、

一系、求法線交橫軸點之式、令法線式中 $地=〇$、餘化



之、即得 $\frac{呐}{𠰷}=天=\frac{呷^{二}}{呷^{二}丅吃^{二}}夭$、以此同數減呐味、即減夫、得 $\frac{呷}{嗪}=夭丅\frac{呷^{二}}{呷^{二}丅吃^{二}}夭=\frac{呷^{二}}{吃^{二}夭}$

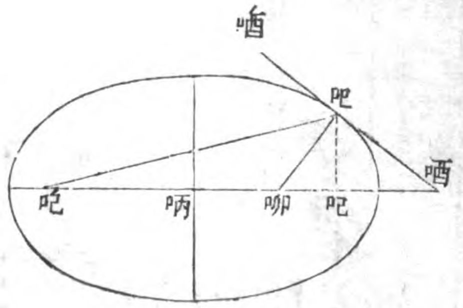
爲次法線式、

二系、若以 $戊^{二}$ 代 $\frac{呷^{二}}{呷^{二}丅吃^{二}}$ 則得 $\frac{呐}{𠰷}=戊夭$、本卷一款六系 以吧呐即丙亦

即 $呷戊$ 加之得 $\frac{吧}{𠰷}=呷戊丄戊夭=戊(呷丄戊夭)$ 爲心與法線交橫軸點之距、

第九款　橢圓之法線、平分切點距二心線之交角、

如圖、吧哂為橢圓切線、吧𠯇、吧咆為切點距二心線、作吧𠰍線、平分𠯇吧咆角、



依幾何理有比例

$\genfrac{}{}{0pt}{}{𠯇}{咆} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{吧}{咆} \because \genfrac{}{}{0pt}{}{𠯇}{𠰍} \cdot \genfrac{}{}{0pt}{}{吃}{𠰍}$

㊀、別得

$\genfrac{}{}{0pt}{}{𠯇}{咆} \perp \genfrac{}{}{0pt}{}{吧}{咆} = 二呷$

$\genfrac{}{}{0pt}{}{𠯇}{咆} = 二丙 = 二呷戊$、

本卷一款

六系

$\genfrac{}{}{0pt}{}{咆}{吧} = 呷\perp戊天$、

本卷一款七系

用此諸同數于㊀式中則得

$二呷 : 二咘戊 :: 呷\perp戊天 : \genfrac{}{}{0pt}{}{咆}{𠰍}$、

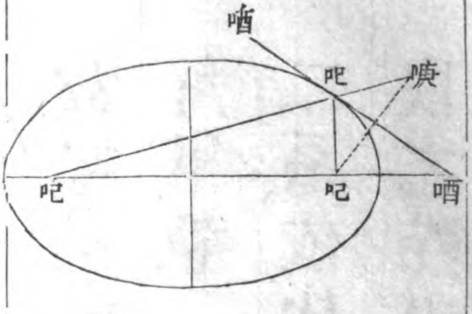
所以

吔㖿＝戊（呷丄戊天）

惟戊（呷丄戊天）為心距法線末點線、本卷八款二系故吔㖿必平分吔吔吃角、而為法線、

一系、吔㖿正交哂哂、而吔吔㖿與吃吔㖿二角等、故吔吔哂與吃吔哂二角亦等、即二帶徑交切線角相等、

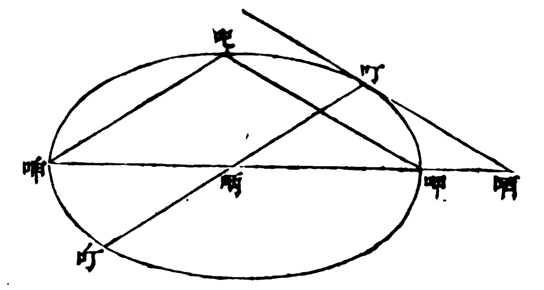
二系、依款可任取橢圜周一點作切線、如吔為所取之點、吔吃吔吃為二帶徑、引長吃吔至㖿、令吔



咦等于吧吃、次作吧咦聯線、次過吧點作正交吧咦之線唒吧唒、卽吧點之切線、蓋吧吧唒角等于咦吧唒角、卽等于吃吧唒角故也、

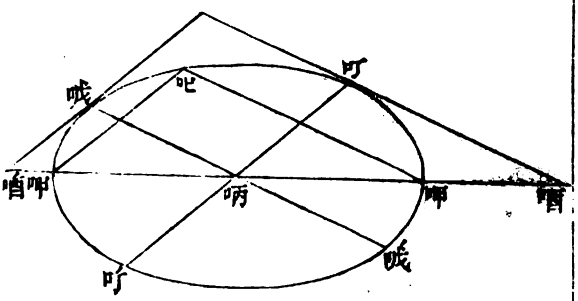
第十款　自長徑端作通弦、與切線平行、則餘通弦必與切點上之徑線平行、反言之理同、

如圖、叮唒爲撱圜之切線、于呷點作通弦呷吧、與切線平行、則餘通弦呻吧必與切點上之徑線叮叮平行、試命叮點之縱橫線爲天地、則呐叮線之



式爲$坤=帳$三卷一款附例即$甲=\frac{天}{地}$而切線與長徑交角之正切爲$甲=\text{丅}\frac{呷\,地}{吃\,天}$、本卷七款一系以此二式相乘、得$甲申=\text{丅}\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、此爲呐叮叮哂二線與呐哂交角之二正切相乘冪、而吧呻哂吧呻呷二角之正切相乘冪、亦等于$\text{丅}\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、本卷六款所以若呻吧與叮哂平行、則呻吧必與呐叮平行、反言之理同、

系、如叮吁爲撱圜之斜徑、叮哂爲其端之切線、作



呷⿰口乙通弦、與叮唒平行、則餘通弦呻⿰口乙與叮⿰口亍平行、本款作⿰口戊唒切線、與呻⿰口乙平行、亦與叮⿰口亍平行、次從切點⿰口戊作⿰口戊⿰口戊斜徑、呻⿰口乙既與唒⿰口戊平行、則呷⿰口乙叮唒必皆與⿰口戊⿰口戊平行、本款故凡二斜徑、此徑與彼徑端之切線平行、彼徑必與此徑端之切線平行、名曰相屬徑、

案凡相屬徑與長徑交角之二正切、命爲甲申、則得 $甲申=丁\frac{丙^{二}}{乙^{二}}$、

第十一款　中點爲原點、相屬徑爲縱橫軸、則其式爲

呷^{二}地^{二}⊥吃^{二}天^{二}一呷^{二}吃^{二}、

呷吃爲相屬二半徑、

凡以中點及長短二徑爲準、撱圜之式爲

呷^{二}地^{二}⊥吃^{二}天^{二}一呷^{二}吃^{二}、

本卷一款

而正交縱橫線易爲斜交縱橫線、原點不易、天地之同數爲

天=天角餘弦⊥地角餘弦、

地=天角弦⊥地角弦、

三卷十款

此二右邊數各自乘、代上式中之天^{二}地^{二}、得左式、

$(呷^{2}角弦^{2}丄吃^{2}角餘弦^{2})地^{2}丄二(呷^{2}角弦角弦丄二吃^{2}角餘弦角餘弦)天地丄(呷^{2}角弦^{2}丄吃^{2}角餘弦^{2})天^{2}＝呷^{2}吃^{2}$

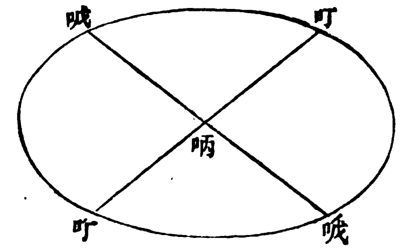
㈠、為斜交縱橫線與長徑成二角之橢圓式二

新軸為相屬徑、則得甲甲′＝丅$\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、系十款即角切角切′＝丅$\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、故呷^{二}角切角切′⊥叱^{二}＝〇、準三角理、

餘弦乘正切、等于正弦、故以角餘弦角餘弦′乘上式、則得呷^{二}角弦角弦′⊥叱^{二}角餘弦角餘弦′＝〇、而

一 式中之天′地′消盡、得角弦′^{二}⊥叱^{二}角餘弦′^{二})地^{二}⊥(呷^{二}角弦^{二}⊥叱^{二}角餘弦^{二})天^{二}＝呷^{二}叱^{二}、

二 即以相屬徑為準之橢



圖式、若令地＝〇、則得

$$\text{天}^2=\frac{\text{呷}^2\text{角弦}^2+\text{吃}^2\text{角餘弦}^2}{\text{呷}^2\text{吃}^2}=\text{呬叮}^2\text{、}$$

若令天＝〇、則得

$$\text{地}^2=\frac{\text{呷}^2\text{角弦}^2+\text{吃}^2\text{角餘弦}^2}{\text{呷}^2\text{吃}^2}=\text{呬哦}^2\text{、}$$

命呬叮爲呷、呬哦爲吃、則㊁式變爲

$$\frac{\text{吃}^2}{\text{地}^2}+\frac{\text{呷}^2}{\text{天}^2}=1\text{、}$$

故

$$\text{呷}^2\text{地}^2+\text{吃}^2\text{天}^2=\text{呷}^2\text{吃}^2\text{、}$$

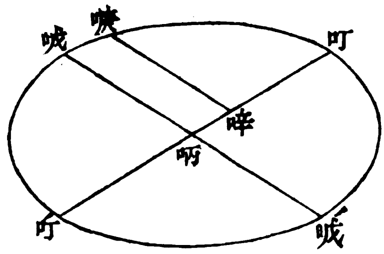
以天地代天地、則得

$$\text{呷}^2\text{地}^2+\text{吃}^2\text{天}^2=\text{呷}^2\text{吃}^2\text{、}$$

與款合、

第十二款　本徑與屬徑之二正方比、若縱線所分

本徑二分之矩形與縱線之正方比、



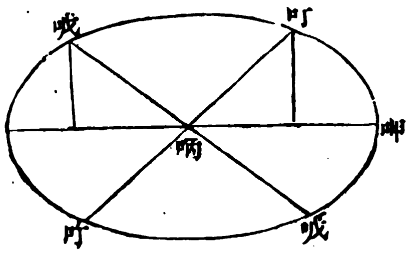
以相屬徑爲準之橢圜式爲 呷^{2}地^2⊥𠮙^{2}天^2＝呷^{2}𠮙^2 本卷十一款

變爲 呷^{2}地^2＝𠮙^2(呷^{2}T天^2)、此可作比例率 呷^2:𠮙^2::呷^{2}T天^2:地^2 即爲 (二呷)^2:(二𠮙)^2::(呷⊥天)(呷T天):地^2、二呷 二𠮙 即相屬徑叮叮哦哦、天即哂啐、故 呷⊥天 爲叮啐、呷T天 爲叮啐、地即唊啐、所以上比例率即 叮叮^2:哦哦^2::叮啐×叮啐:唊啐^2 與款合、

系、凡徑線上二縱線之正方比、若所分徑線各二分之矩形比、

案、凡本徑與屬徑連比例之末率為通徑、長徑之通徑等于$\frac{\text{呷}}{\text{二吃}^{\text{二}}}$、本卷一款五系短徑之通徑等于$\frac{\text{吃}}{\text{二呷}^{\text{二}}}$、

第十三款　凡相屬徑之二正方和、等于長短徑之二正方和、



如圖、叮叮哎哎為相屬二徑、命叮點之縱橫線為天地、哎點之縱橫線為矢地、叮哂呷角為角、哎哂呷角為角、則必得

$角切 = \frac{天}{地}$

$角切 = \frac{天'}{地'}$

故 $角切乂角切 = \frac{天'天}{地'地} = \frac{呷^{二}}{吃^{二}}$（本卷十款案）此式二邊各自乘去分得 $呷^{四}地^{二}地'^{二} = 吃^{四}天^{二}天'^{二}$ ㊀、

叮吠二點在橢圜周、故有式

$呷^{二}地^{二} = 呷^{二}吃^{二}丅吃^{二}天^{二}$、

$呷^{二}地'^{二} = 呷^{二}吃^{二}丅吃^{二}天'^{二}$

（本卷一款）相乘、得式

$呷^{四}地^{二}地'^{二} = 呷^{四}吃^{四}丅呷^{二}吃^{四}天^{二}丅呷^{二}吃^{四}天'^{二}丄吃^{四}天^{二}天'^{二}$ ㊁、

以㊀㊁兩式相消、得

$呷^{四}吃^{四}丅呷^{二}吃^{四}天^{二}丅呷^{二}吃^{四}天'^{二} = 〇$、

以 $呷^{二}吃^{四}$ 約之、得

$呷^{二}丅天^{二}丅天'^{二} = 〇$、

即

$呷^{二} = 天^{二}丄天'^{二}$

㊂、同例得

$= 地^{二}丄地'^{二}$

㊃、以㊂㊃兩式相加、得左式、

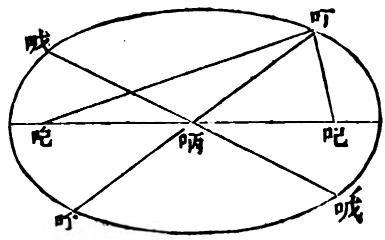
呷²丄𠮙²＝天²丄地²丄天'²丄地'²＝呷'²丄𠮙'²、本卷十一款與款合、

系、準本款㊂式、天'²＝呷²丅天²又準前、本卷一款呷²地²＝𠮙²(呷²丅天²)、故天'²＝$\frac{𠮙^2}{呷^2}$地²卽天'＝$\frac{𠮙}{呷}$地同例

得天'＝$\frac{呷}{𠮙}$地

第十四款　徑端距二心線之矩形等于半屬徑之正方、

設以正交二軸爲準、命叮點之縱橫線爲天地、則

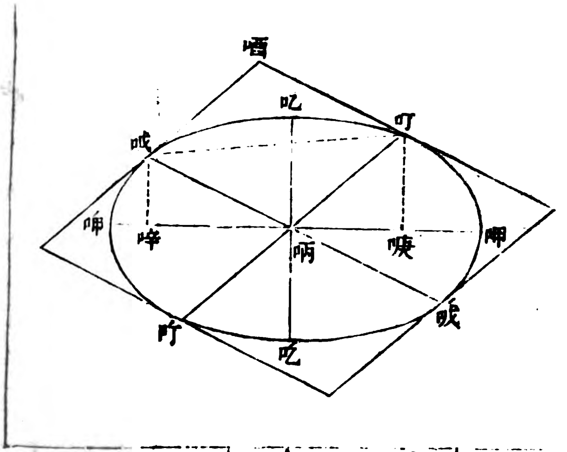


叮點距中點線之式爲$呻^2=天^2\perp地^2$而橢圜式爲$地^2=吃^2丅\frac{呷^2}{吃^2}天^2$、本卷一款案以此同數代上式地²、得$呻^2=吃^2\perp\frac{呷^2}{呷^2丅吃^2}天^2=吃^2\perp戊^2天^2$、本卷一款六系惟$呻'^2\perp吃'^2=呷^2\perp吃^2$本卷十三款故$吃'^2=呷^2丅戊^2天^2$、而$秝=呷^2丅戊^2天^2$、本卷一款七系所以得式$秝=吃'$與款合、

第十五款　相屬徑四端之四切線成平行四邊形與長短二徑之矩形等積、

如圖、叮吰吋哦爲相屬徑之四端于此四點作四

切線成平行四邊形、其積等于$\substack{呷\\呻}$乂$\substack{吃\\吃}$、試用正交二軸、命叮點之縱橫線爲天地、戍點之縱橫線爲天′地′、呐叮戍三角形、等于叮咉啐戍四邊形內少



叮咉呐戍啐呐二三角形、卽

二呐叮戍＝（天丄天′）（地丄地′）丅天地丅天′地′、

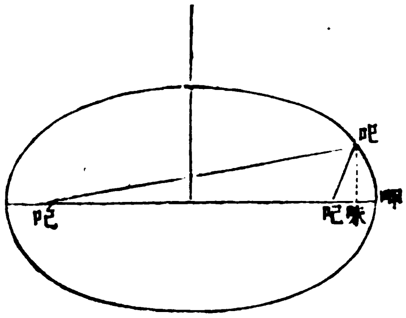
＝天′地丄天地′＝天′$\frac{呷}{吃天}$丄地′$\frac{吃}{呷地}$、

本卷十三款系右邊通其分爲同母、得$\frac{呷吃}{吃天^{二}丄呷地^{二}}=\frac{呷吃}{呷^{二}吃^{二}}$、故呐戍哂叮平行四邊形、等于

吃、呷而叮㖂吖㖂四切線所成平行四邊形等于吃呷四

即 二呷丄吃＝$\frac{呷}{呻}$〤吃、 與款合、

第十六款　以心點爲極、擳圜之極式爲 求＝$\frac{一丄戊亥餘弦}{巳}$、 巳爲半



通徑、戊爲擳率、亥爲帶徑交長徑之角、

凡擳圜周任何點距二心之式爲

求＝$\frac{叱}{吧}$＝呷丅戊天

求'＝$\frac{叱'}{吧}$＝呷丄戊天、

本卷一款七系 此橫線天從中點起、若移原點

自中點至心𠮙、則天當以夭丄丙代之、又以呷戊代丙、本卷

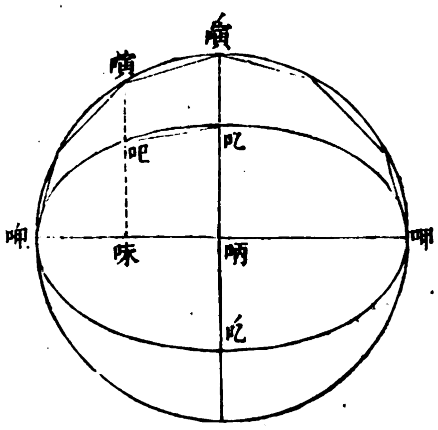
一款六系則得天=夭丄呷戊、命吧𠮙呷角爲亥、則得夭=未亥餘弦、所以天=未亥餘弦丄呷戊、用

此同數代前未同數中之天、得吧吧=未一呷丅戊未亥餘弦丅呷戊二、移其項、則得下

式末(一丄戊亥餘弦)=呷丅呷戊二=呷(一丅戊二)、命長徑之通徑爲二巳、等于二呷乙二、本卷十二款案則得

巳＝卯(丁戊)、本卷一款六系故未＝二上戊亥巳餘弦、與款合

第十七款　凡撱圜面積、為長短徑上二平圜面積之中率、



如圖、呷呻為呷吃呻吆撱圜之長徑、即以為圜徑、作平圜、于平圜裏任作多等邊形、自諸邊之界嗊嗊等點、作呷呻之諸垂線、交撱圜吃吧諸點、作諸交點之

聯線、成擠圜裏多邊形、其邊數與平圜裏形等、命嗔嗔二點之縱線為呲呲'、吧叱二點之縱線為地地'、橫線同為天矢、則嗔嗔味哂四邊形面積、等于$\frac{二}{呲丄呲'}(天丅矢)$、叱吧味哂四邊形面積、等于$\frac{二}{地丄地'}(天丅矢)$、故$嗔嗒吧哂=\frac{呲丄呲'}{地丄地'}$、惟$地=\frac{呷}{叱}呲$、$地'=\frac{呷}{叱}呲'$、本卷四款所以$\frac{呲丄呲'}{地丄地'}=\frac{呷}{叱}$、即$嗔嗒吧哂=\frac{呷}{叱}$、同例得擠圜與平圜裏相當各四邊形比、皆若叱與呷比、故擠圜與平圜裏二多邊形比、亦若叱與呷比、命二多邊形為巳吧、則得$\frac{吧}{巳}=\frac{呷}{叱}$、

其形無論若干邊皆合、邊多至無窮亦合、橢圜平圜爲多邊形之限、故亦合、命橢圜平圜二面積爲申呻、則得 $\frac{\text{呻}}{\text{申}}=\frac{\text{呷}}{\text{吃}}$ 即 $\text{申}=\text{呻}\frac{\text{呷}}{\text{吃}}$ 惟平圜之半徑爲呷、其面積爲 $\text{周呷}^{\text{二}}$、故橢圜之面積爲 $\text{周呷}^{\text{二}}\frac{\text{呷}}{\text{吃}}=\text{周呷吃}$ 即橢圜長短徑上二平圜積之中率、蓋長徑上之平圜積爲 $\text{周呷}^{\text{二}}$、短徑上之平圜積爲 $\text{周吃}^{\text{二}}$、二數之中率爲 周呷吃 也、與款合、

代微積拾級卷七

米利堅羅密士譔

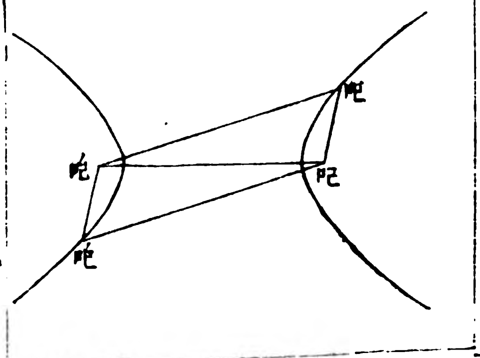
英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

代數幾何七

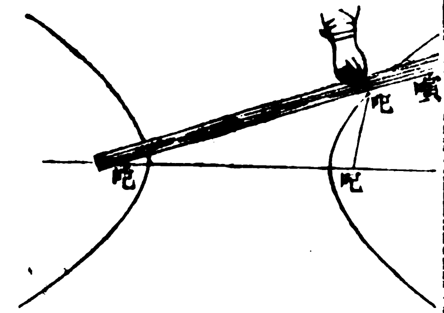
論雙曲線

雙曲線亦圜錐曲線之一、平面曲線也、曲線之每點、距二定點之較恆等、二定點乃曲線之二心、

如圖、卬卬爲二定點、設吧點繞卬點、令卬吧吧卬二線之較恆等、則吧點必行成雙曲線、吧卬卽二



心也、又設咆點繞吧點、令咆吧丁咆吧恆等于吧吧丁吧吧、則咆點必行成對面曲線、與本線相似、二曲線爲相對曲線、因有相對曲線、故名曰雙曲線、或省曰雙線、



依此理、雙曲線可以器作之、 如圖、吧咆爲二定點、取一界尺、長于吧咆之距、一端之角銷定于咆點、令活動可旋轉、又取一線短于界尺、一端着于吧點、一端着于界尺又一端之嗊點、乃以鉛筆緊偪其線、

令附界尺之吔嗔邊、而旋轉界尺、鉛筆必行成雙曲線之一邊、蓋界尺任在何方向、吧叱吧吔二線之較、恆等于尺線較故也、以線尺反之、如法成又一邊、更以尺之一端銷定于叱點、線之一端着于吔點、如法成對面曲線、

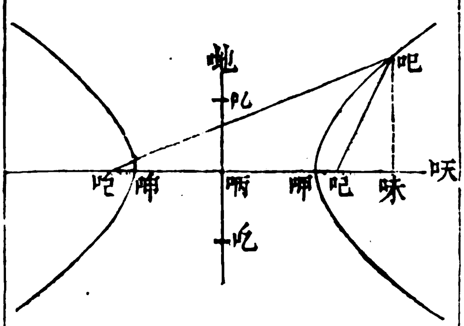
平分二心聯線之點、曰中點、

過中點以雙線爲界之線、爲雙線徑、

徑引長之能過二心者、爲橫徑、

第一款、凡雙曲線以中點及二軸爲準、其式爲 $呷^{2}地^{2}-吃^{2}天^{2}=-呷^{2}吃^{2}$

呷吃爲二半軸、天地爲曲線上任一點之縱橫線、



如圖、吧咆爲二心、作哂呹、哂呲二軸、以中點哂爲原點、吧爲曲線上任一點、作吧味正交哂呹、命吧點距兩心線之較爲二呷、哂吧即哂咆爲丙、吧吧爲末、咆吧爲末、吧點之縱橫線爲天地、則有式 $咆吧^{2}=吧味^{2}+咆味^{2}$ 、即 $末^{2}=地^{2}+(天-丙)^{2}$ ㈠、又

$\frac{吃^{二}}{吧}=\frac{吧^{二}}{味}\perp\frac{吃^{一}}{味}$ 即 $未^{二}=地^{二}\perp(天\perp丙)^{二}$、㊁、以㊀㊁兩式相加、得 $未^{二}\perp禾^{二}=二(地^{二}\perp天^{二}\perp丙^{二})$ ㊂、以㊀式減㊁式、則得 $未\top禾^{二}=四丙天$、即 $(禾\perp未)(未\top禾)=四丙天$ ㊃、準總論、得 $禾\top未=二呷$、用此同數于㊃式中、得 $禾\perp未=\frac{呷}{二丙天}$、以上式加減之、得下式 $未=呷\perp\frac{呷}{丙天}$ ㊄、$未=\top呷\perp\frac{呷}{丙天}$ ㊅、以此二式之同數各自乘用于㊂式中、得下式 $呷^{二}\perp\frac{呷^{二}}{丙^{二}天^{二}}=地^{二}\perp天^{二}\perp丙^{二}$、化之、則

得 $呷^{二}地^{二}丄(呷^{二}丅丙^{二})天^{二}=呷^{二}(呷^{二}丅丙^{二})$ ㊆、即雙線之式、試置 $𠮙^{二}=丙^{二}丅呷^{二}$ 則㊆式即變爲 $呷^{二}地^{二}丅𠮙^{二}天^{二}=丅呷^{二}𠮙^{二}$ 與款合

案、雙線式較之撱圜式、惟𠮙²之記號不同耳、撱圜之𠮙²爲正、而雙線之𠮙²爲負也、若移項以呷²約之、則爲 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{𠮙^{二}}(天^{二}丅呷^{二})$、

一系、求曲線交橫軸之點、必令 $地=○$ 則 $天=丄丅呷$、即丙呷亦

即昞唓、故曲線交橫軸爲呷唓二點、在中點左右距中點相等、$\frac{昞}{二呷}$即$\frac{呷}{唓}$、等于二呷、則曲線任何點、距二心之較、恆等于橫徑、過中點正交橫徑之線、爲相屬徑、

二系、若$叱=呷$、則款式變爲$地^2丅天^2=丅呷^2$此名等邊雙線、

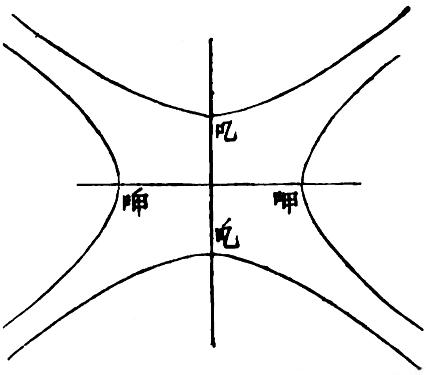
三系、$叱^2=丙^2丅呷^2$、則$呷^2丄叱^2=丙^2$即$\frac{昞^2}{叱}$、故中點距心線之平方等于二半徑之平方和、

四系求通徑準案 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(天^{二}丅呷^{二})$、令 $天=丙=\frac{呷丙}{叱}$、則 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(丙^{二}丅呷^{二})$、惟 $叱^{二}=丙^{二}丅呷^{二}$、故 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}\times叱^{二}$、則有比例 $呷:叱::叱:地$ $二呷:二叱::二叱:二地$、故通徑為橫徑與相屬徑連比例之三率、

五系、中點距心線、以半橫徑約之、得 $\frac{呷}{丙}$、為雙線兩心差率、命為戊、則 $\frac{呷}{丙}=戊$ 即 $丙=呷戊$、惟 $叱^{二}=丙^{二}丅呷^{二}$ 故 $呷^{二}丄叱^{二}=呷^{二}戊^{二}$、即 $\frac{呷^{二}}{叱^{二}}=戊^{二}丅一$、用此同數于案式中變為 $地^{二}=(戊^{二}丅一)(天^{二}丅呷^{二})$

六系款中㊄㊅二式為$未=呷丄\frac{呷}{丙}天$、$未=丅呷丄\frac{呷}{丙}天$、以戊代$\frac{呷}{丙}$、則變為$未=戊天丄呷$、$未=戊天丅呷$、為雙線任一點距二心之式、相乘得$未未=戊^{二}天^{二}丅呷^{二}$為距心二線相乘冪、

又案、以𠮙𠮙為橫徑、作相對雙線、而以呷呷為相

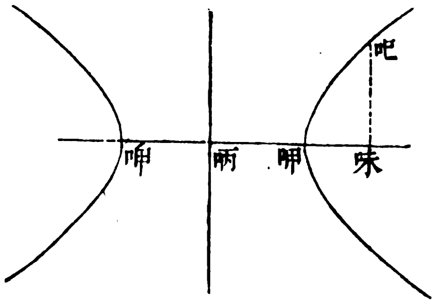


屬徑、此雙線必為本雙線之相屬雙線、求相屬雙線之式法置$呷^{二}地^{二}丅𠮙^{二}天^{二}=丅呷^{二}𠮙^{二}$、易呷為

吆易天爲地、得 $吆^{二}天^{二}丅呷^{二}地^{二}＝丅呷^{二}吆^{二}$ 即相屬雙線之式、

第二款、原點在橫徑之端、則其式爲 $地^{二}＝\frac{呷^{二}}{吆^{二}}(天^{二}丄二呷天)$、呷吆爲二半徑、天地爲曲線上任一點之縱橫線、

凡以中點爲原點、雙線之式爲 $呷^{二}地^{二}丅吆^{二}天^{二}＝丅呷^{二}吆^{二}$ ㊀、本卷



一款今原點移至呷、則橫線改而縱線不

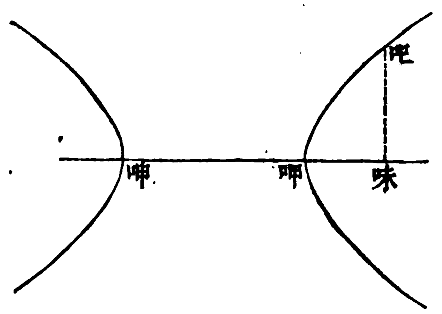
改命新橫線呷味為夭則得 $\frac{丙}{味}=\frac{呷}{味}丄\frac{呷}{丙}$ 卽 $天=夭丄呷$、用此同數代

㊀式中之天、則得 $呷^{二}地^{二}丅吃^{二}夭^{二}丅二吃^{二}呷夭=〇$、變作 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(夭^{二}丄二呷夭)$、以天代夭、卽得 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(天^{二}丄二呷天)$、與

款合、

第三款、縱線之正方、與其交橫軸點距橫徑兩端

二線之矩形比、若相屬徑與橫徑之二正方比、



原點在横徑端呷、則其式爲

$地^{二}=\frac{呷^{二}}{乙^{二}}(天丄二呷)天$、本卷二款

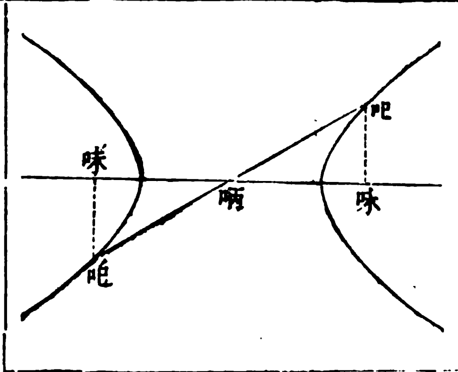
故有比例

$地^{二}:(天丄二呷)天::乙^{二}:呷^{二}$

二呷即横徑呷呻、天即呷味、故天丄二呷即呻味、而$(天丄二呷)天$、爲味點距呷距呻二線之矩形、

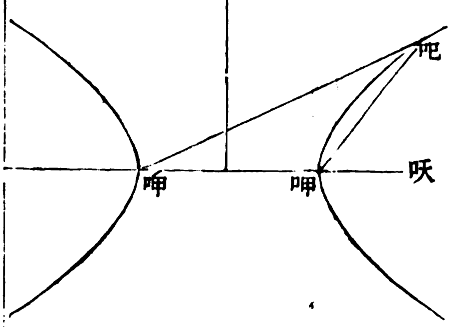
系凡二縱線之正方比、若其二交點距横徑兩端各二線之矩形比

第四款　凡雙線之徑平分之必于中點、



如圖、任作雙線之斜徑吧呝、命吧點之縱橫線爲天地、呝點之縱橫線爲天′地′、依前得式 $地^2=\frac{呷^2}{叱^2}(天^2\,丁\,呷^2)$、$地'^2=\frac{呷^2}{叱^2}(天'^2\,丁\,呷^2)$、本卷一款案、故 $\frac{地^2}{地'^2}=\frac{天^2\,丁\,呷^2}{天'^2\,丁\,呷^2}$、而吧呐味呝呐咪爲相似三角形、則得式 $\frac{地}{地'}=\frac{天}{天'}$、是以 $\frac{天^2}{天'^2}=\frac{天^2\,丁\,呷^2}{天'^2\,丁\,呷^2}$、去其分得 $天=天'$、則 $地=地'$、所以 $天^2\,丄\,地^2=天'^2\,丄\,地'^2$、即 $\frac{呐}{吧}=\frac{呐}{呝}$、亦 $\frac{呐}{吧}=\frac{呐}{呝}$、與款合

第五款　雙線上任一點、距橫徑兩端之線交橫軸角二正切之矩形等于半橫徑冪約相屬徑冪、

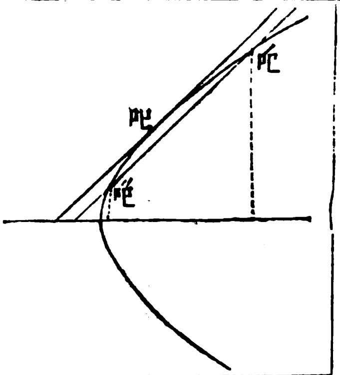


呷吧線內呷點之縱橫線為 $天=呷$ $地=〇$、其線之式為 $地=甲(天丅呷)$、三卷三款 呻吧線內呻點之縱橫線為 $天=丅呷$ $地=〇$、其線之式為 $地=申(天丄呷)$、此二線交曲線點同、則交點之天地二元相同、亦與雙線之天地元同、故以二式相乘、得 $地^{二}=甲申(天^{二}丅呷^{二})$ 與雙線式 $地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(天^{二}丅呷^{二})$、本卷一款案

相消得 甲 ⊥ 丁 $\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$ = 〇、即 甲 ⊥ = $\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、與款合、

系、等邊雙線 呷 = 叱、則得 ⊥ = 丅、故二距線與橫軸交角之和等于直角、三卷六款附條

第六款、雙線之切線式為 呷^{二}地 地 丅 叱^{二}天 天 = 丅 呷^{二}叱^{二}、天地為切線任一點之縱橫線、夭地為切點之縱橫線、



如圖、任與切線平行作吧咆線交曲線于吧咆二點、此線向吧點而移、則吧咆

二點漸相近、至合于吧、則此線變爲切線、命吧′點之縱橫線爲天′地′、吧″點之縱橫線爲天″地″、則吧′吧″線之式爲

$地丅地″＝\frac{天′丅天″}{地′丅地″}(天丅天″)$ ㊀、

三卷四款吧′吧″二點俱在雙線內、故得

$呷地′^{二}丅吃天′^{二}＝丅呷^{二}吃^{二}$ ㊁、

$呷地″^{二}丅吃天″^{二}＝丅呷^{二}吃^{二}$ ㊂、

本卷一款以㊂式減㊁式、得下式

$呷(地′^{二}丅地″^{二})丅吃(天′^{二}丅天″^{二})＝〇$、

即

$呷(地′丄地″)(地′丅地″)丅吃(天′丄天″)(天′丅天″)＝〇$、

故

$\frac{天′丅天″}{地′丅地″}＝\frac{呷^{二}(地′丄地″)}{吃^{二}(天′丄天″)}$、

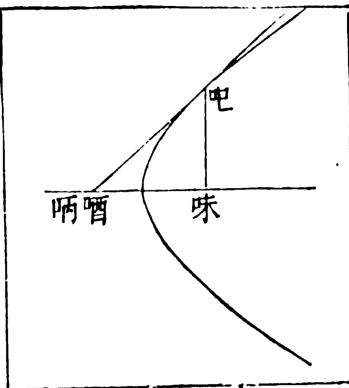
用此同數于㊀式中、則得

$地丅地″＝\frac{呷^{二}(地′丄地″)}{吃^{二}(天′丄天″)}(天丅天″)$ ㊃、

吧′吧″合爲一點、

則 $天'=天''$ $地'=地''$、而四式變爲 $地''\top地'=\frac{呷地'}{吃天'}(天''\top天')$ 即雙線吧點切線之式通其分、得 $呷地地'\top呷地^{二}=吃天天'\top吃天^{二}$、即 $呷地地'\top吃天天'=\top呷吃$、本卷一款與款合、

一系、四式變式中之 $\frac{呷地}{吃天}$、爲切線與橫軸交角之正切、



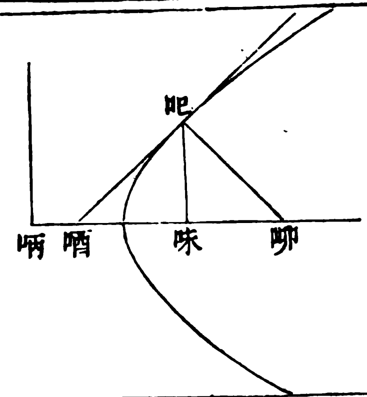
二系、求切線與橫軸之交點、令本款式中 $地=0$、則得 $天=\frac{天'}{呷}=\frac{呐}{晒}$、夫即呐味、以呐晒減之、得

$\frac{酉}{味}=天丅\frac{天}{呷^{2}}=\frac{天}{天^{2}丅呷}$

第七款、雙線之法線式爲 $地丅地'=丅\frac{吃^{2}地'}{呷^{2}天'}(天丅天')$、天地爲法線任一點之縱橫線、天地爲法線交曲線點之縱橫線、過吧點之線、其式爲 $地丅地'=甲(天丅天')$ ㊀、三卷三款法線爲切線之垂線、則有式 $甲=\frac{丅甲'}{一}$ 三卷十六款惟正切之式爲 $甲'=\frac{呷^{2}地'}{吃^{2}天'}$、本卷六款一系所以 $甲=丅\frac{吃^{2}天'}{呷^{2}地'}$、用此同數于㊀式中、則得 $地丅地'=丅\frac{呷^{2}地'}{吃^{2}天'}(天丅天')$ ㊁、即法線式與款

合、

一系、求法線交橫軸之點、法令㊁式中 $地=〇$ 則變為 $\frac{呐}{㖫}=天=\frac{呷^{二}}{呷^{二}丄吃^{二}}天$、若以呐味之代數夫減之、則得次法線式

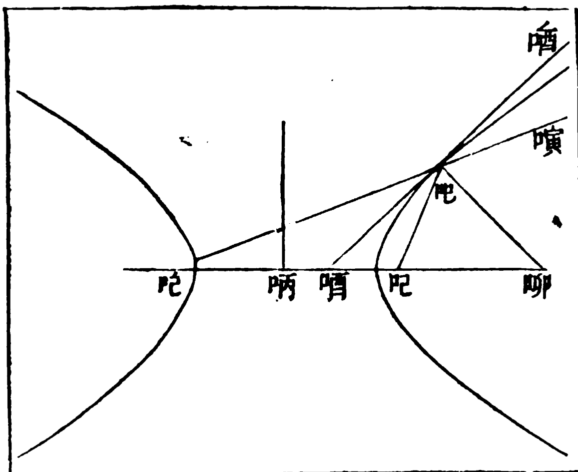


$\frac{味}{㖫}=\frac{呷^{二}}{呷^{二}丄吃^{二}}天丅天=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}夫$、

二系、若置 $戊^{二}=\frac{呷^{二}}{呷^{二}丅吃^{二}}$、本卷一款五系 則得 $\frac{呐}{㖫}=戊夫$、以呐吔 見八款圖 即丙即戊呷 本卷一款五系 加之、則得 $\frac{吔}{㖫}=呷戊丄戊^{二}夫$ $=戊(呷丄戊夫)$、為心距法線交橫軸點、

第八款　雙線之切線、平分切點距二心線之交角

如圖、吧哂爲切線、吧吧吧爲切點距二心線、試引長吧吧至嗔、作吧唧線、平分吧吧嗔外角、依幾何例有比例



吃吧.吧吧..吃唧.吧嗔　轉理得

吃吧丅吧吧.吃吧..吃吧.吃唧　㊀、

別得　吃吧丅吧吧＝二呷、

總論　吃吧＝二丙＝二呷戊、

本卷五款一系　吃吧＝呷丄戊天、

本卷六款一系

用此諸同數于㊀式中、得

二呷∴二呷戊∵呷丄戊天∴吃唧

故　吃唧＝戊(呷丄戊天)、

惟　戊(呷丄戊天)、

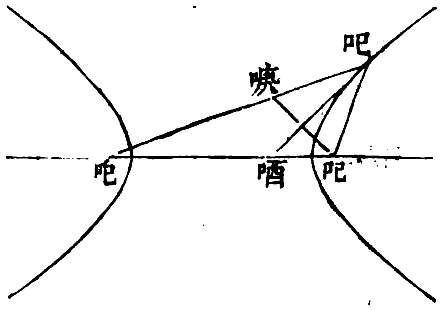
爲心距法

線交橫軸點、本卷七款二系故吧𠰷卽法線、正交切線哂哂、而吧吧𠰷⿰口寅吧𠰷二角等、則吧吧哂⿰口寅吧哂二角亦等、且卽與吔吧哂角等、故切線吧哂平分吧吧吔角、

一系、法線吧𠰷平分切點距二心線交角之外角吧吧⿰口寅、

二系、準款、可任設一點、作雙線之切線、

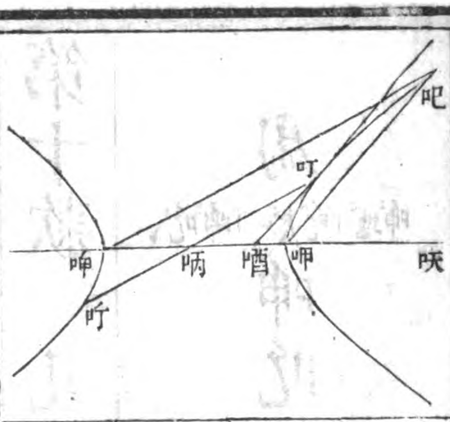
如圖、吧爲任設之點、作二帶徑吧吧吧吔、于吧吔上取吧咦、等于吧吔、作聯線吧咦、乃從吧點作吧



嘆之垂線吧哂、卽切線、因吧哂平分吧吧吔角故也、

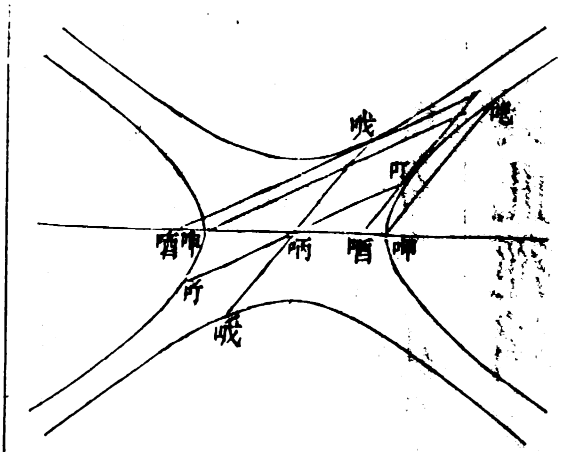
第九款、自横徑一端作通弦、與切線平行、則餘通弦必與切點上之斜徑平行、反之亦然、

如圖、叮哂爲雙線之切線、通弦呷吧與之平行、則餘通弦呷吧必與切點上斜徑叮吖平行、命叮點之縱横線爲夫地、則呐叮線式爲軑、三卷一卽夫地、地=款附條申=



而切線交橫徑角之正切爲$甲=\frac{呷^{二}地}{叱^{二}天}$、二式左右各相乘、得$甲巾=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、爲叮呐哂叮哂呋二角正切之矩形、惟吧呷呋吧呻呷二角正切之矩形、亦等于$\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、本卷五款故呷吧與叮哂平行、則呻吧必與呐叮平行也、

系、準本款、若作相屬雙線之切線戕哂、與呻吧平行、亦與叮吁平行、則從戕點作戕哦斜徑、必與呷吧平行、亦與叮哂平行、故叮吁戕哦二斜徑、彼徑與此徑端之切線平行、此徑亦必與彼徑端之切



線平行、名曰相屬徑、

案、凡雙線二徑、若彼徑與此徑端切線平行、卽爲相屬徑、命二相屬徑交橫徑角之二正切爲甲弔、則有式

$甲弔=\frac{呷^{2}}{吃^{2}}$、

第十款　凡雙線以中點與相屬二徑爲準、則其式爲

$呷^{2}地^{2}\ 丅\ 吃^{2}天^{2} = 丅\ 呷^{2}吃^{2}$、

呷吃爲相屬二半徑、

雙線以橫直二徑爲準、其式爲

呷二地二丅吃二天二=一呷二吃二、

正交二軸易爲斜交二軸、原點不易、得

天=天角餘弦丄地角餘弦

地=天角弦丄地角弦、

三卷十款

以此二同數各自乘、用于上式中、則得如下式

〔(呷角弦丅吃角餘弦)地二丄(二呷角弦角弦丅二吃角餘弦角餘弦)天地〕

〔丄(呷角弦丅吃角餘弦)天二=一丅呷二吃二

(一)、爲斜交縱

橫二線與橫徑成角之雙線式、惟二新軸爲相屬

徑、則有式 呷帀=$\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、本卷九款案 即 角切角切=$\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$ 故 呷角切角切丅吃二=○ 以 角餘弦角餘弦 乘之、得下式

呷角弦角弦丅吃角餘弦角餘弦=○、

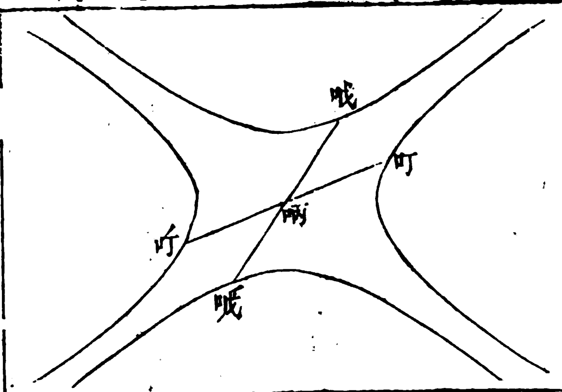
凡 角餘弦角切=角弦 故也、所以㊀式中函天地之項自消得

(呷角弦二丅吃角餘弦)地二丄(呷角弦丅吃角餘弦)天二=丅呷吃二 ㊁、

此即以相屬二斜徑爲準之式、若令$地=〇$、則得

$$天^{2}=\frac{呷^{2}角弦^{2}丅叱^{2}角餘弦^{2}}{丅呷^{2}叱^{2}}=呞叮^{2}$$

若



令$天=〇$、則得

$$地^{2}=-\frac{呷^{2}角弦^{2}丅叱^{2}角餘弦^{2}}{丅呷^{2}叱^{2}}=呞戊^{2}$$

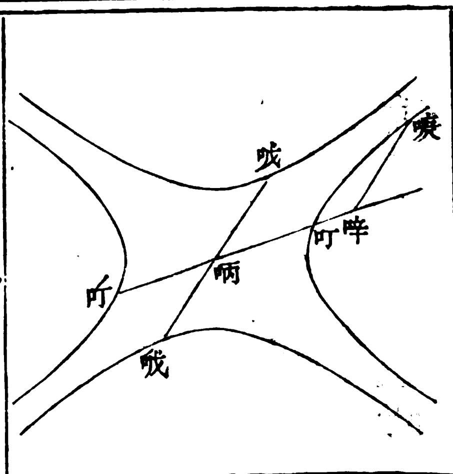
、設$呞叮^{2}$爲正、則$呞戊^{2}$必爲負、蓋$呞叮^{2}$之同數、其子爲負、則其母亦必爲負、方能得正

也、故 $呷^{二}角弦^{二}<吃^{二}角餘弦^{二}$ 卽 $角切^{二}<\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、惟 $角切角切^{二}=\frac{呷^{四}}{吃^{四}}$ 本卷九款系 故 $角切^{二}>\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$、卽 $呷^{二}角弦^{二}>吃^{二}角餘弦^{二}$ 故、$\frac{口丙^{二}}{口戊}$ 同數之毋為正、而其子為負、則約得數必負、故 $\frac{口丙^{二}}{口戊}$ 為負、乃命 $\frac{口丙^{二}}{叮}$ 為呻、$\frac{呷^{二}}{口戊}$ 為 $丅吃^{二}$、則㊁式變為 $\frac{丅吃^{二}}{地^{二}}\perp\frac{呻^{二}}{天^{二}}=一$、故 $呻^{二}地^{二}丅吃^{二}天^{二}=丅呻^{二}吃^{二}$、以天地代天地、則得 $呻^{二}地^{二}丅吃^{二}天^{二}=丅呻^{二}吃^{二}$、與款合、

第十一款 本徑與屬徑之二正方比、若縱線交橫軸點距本徑二界二線之矩形、與縱線之正方比、

以中心及相屬徑為準、雙線式為$呷^2地^2丅叱^2天^2=丅呷^2叱^2$、

本卷十款變作$呷^2地^2=叱^2(天^2丅呷^2)$即可化為比例率如下



$呷^2:叱^2::天^2丅呷^2:地^2$即$(二呷)^2:(二叱)^2::(天丄呷)(天丅呷):地^2$二呷二叱為叮吖吰哦二相屬徑、天為哂啐、則天丄呷為吖啐、天丅呷為叮啐、地為咦啐、故比例率為$叮吖^2:吰哦^2::叮啐\times吖啐:咦啐^2$與

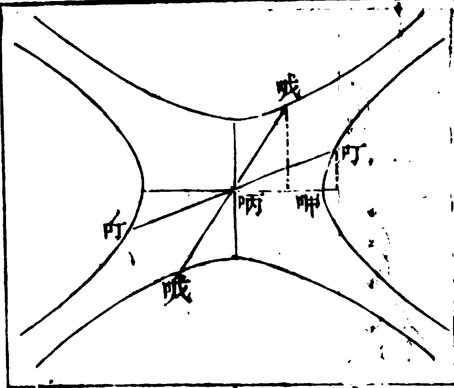
款合、

系凡同徑二縱線之正方比、若二縱線交橫軸點距本徑二界各二線之矩形比、

案、凡徑之通徑、爲本徑與屬徑連比例之末率、橫徑之通徑、等于$\frac{\text{呷}}{\text{二吃}^{\text{二}}}$、本卷一款四系縱徑之通徑等于$\frac{\text{吃}}{\text{二呷}^{\text{二}}}$、

第十二款、凡二相屬徑之正方較、恆與縱橫二徑之正方較等、

如圖、任取叮吖呅呅爲二相屬徑、命叮點之縱橫線爲天地、呅點之縱橫線爲天地、叮呐呷角爲角、



哦呐呷角爲角、則$角切=\frac{天}{地}$、$角切=\frac{天'}{地'}$、故$角切角切=\frac{天天'}{地地'}$、即等于$\frac{呷^2}{叱^2}$、

叮吖哦哦係相屬故也、本卷九款案以兩邊

數$\frac{天天'}{地地'}$與$\frac{呷^2}{叱^2}$、去其分各自乘、得下式$天^2天'^2叱^2=地^2地'^2呷^2$

(一)、叮點在曲

線內、故有式$天^2叱^2丄叱^2呷^2丅=地^2呷^2$、本卷一款哦點在相屬曲線內、故有式

呷^{二}地^{二}＝丄呷叱^{二}丄叱^{二}天^{二}、

本卷一款又案二式相乘、得下式

呷^{四}地^{二}地^{二}＝丅呷^{四}叱^{四}丄呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天^{二}丄叱^{四}天^{二}天^{二}

㊁、以㊀㊁兩式相消、得

丅呷^{四}叱^{四}丄呷^{二}叱^{四}天^{二}丅呷^{二}叱^{四}天^{二}＝〇

即

呷^{二}＝天^{二}丅天^{二}

㊂、同例得

叱^{二}＝地^{二}丅地^{二}

㊃、以㊃式減㊂式、得

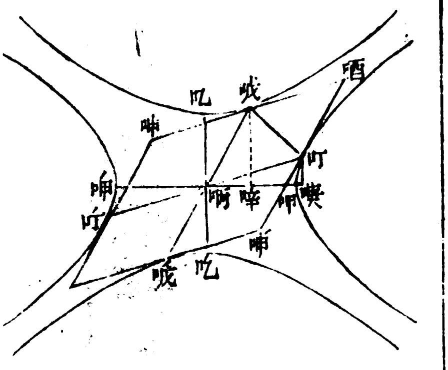
呷^{二}丅叱^{二}＝天^{二}丄地^{二}丅天^{二}丅地^{二}

＝呷丅叱、

與款合、

系、準本款（三）式$天^2=呷^2⊥〃天^2$、又準雙線式$呷^2〃地^2=吃^2(呷^2⊥〃天^2)$、本卷一款又案故$天^2=\frac{吃^2}{呷^2}〃地^2$、卽$天=\frac{吃}{呷}〃地$、同例得$地=\frac{呷}{吃}〃天$、

第十三款　過相屬二徑界之四切線所成平行邊形、等于縱橫二徑之矩形、



如圖、叮叮哦哦爲相屬二徑之四界、過此四界作四切線成平行邊形、其面積必等于呷呷乘吃吃、　別得哂叮哦三角形、等于叮哦啐噢四邊形、

加哦呐啐三角形、少呐叮庚三角形、命叮點之正

交縱橫線爲天地、哦點之正交縱橫線爲天′地′、則

得

二呐叮哦＝(天丅天′)(地丄地′)丄天′地′丅天地

＝天地′丅天′地

＝天$\frac{\text{呷}}{\text{吃天}}$丅地$\frac{\text{吃}}{\text{呷地}}$

＝$\frac{\text{呷吃}}{\text{吃}^2\text{天}^2\text{丅呷}^2\text{地}^2}$、

二本卷十款系、亦等于$\frac{\text{呷吃}}{\text{呷}^2\text{吃}^2}$、一本卷一款、即呷吃、故呐哦

唒叮平行邊形等于呷吃、叮哦叮′哦′平行邊形等于

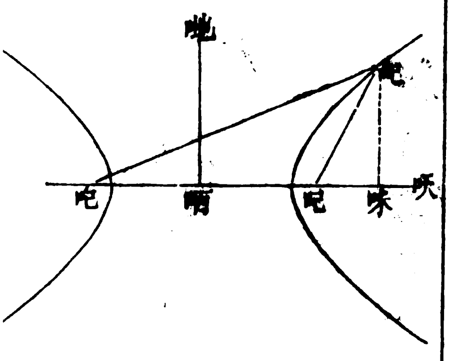
四呷吃、即二呷乂二吃＝$\frac{\text{呷}}{\text{呷}}$乂$\frac{\text{吃}}{\text{吃}}$、與款合、

第十四款　以心為極雙線之極式為 $未=\frac{一\perp戊亥餘弦}{巳}$、巳為半通徑、戊為撱率、亥為帶徑交橫徑角、

雙線內任何點距心點之式為

$未=\frac{吧}{吧}=丅呷\perp戊天$

$未=\frac{吧}{吧}=呷\perp戊天$、本卷一款六系　此式橫線天從中點起、今原點從中點哂移至心點吧、則當以$天\perp丙$代天、又以呷戊代丙、本卷一款五系　則得 $天=天\perp呷戊$、設命吧吧哂角為亥、則



得$天=丅未亥餘弦$、五卷八款論所以$天=丅未亥餘弦丄呷戊$、故$\frac{吧}{吧}=未=丅呷丅戊未亥餘弦丄呷戊^{二}$、移其項、得$未(一丄戊亥餘弦)=丅呷丄呷戊^{二}=呷(戊^{二}丅一)$、若命橫

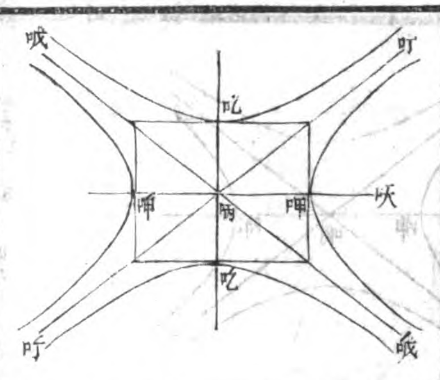
徑之通徑為$二巳$等于$\frac{呷}{二吧^{二}}$、本卷十三款案則得下式$巳=呷(戊^{二}丅一)$、本卷一款

五系所以得$未=\frac{一丄戊亥餘弦}{巳}$、與款合、

論雙線之漸近線

過縱橫二徑界作四切線、成矩形、次作二對角線、引長之至無窮、必與雙線漸相近、而永不相遇、名曰雙

線之漸近線、



如圖、呷呻𠮙吃爲相屬四雙線之縱橫二徑、過呷𠮙呻吃四界點作四切線、次作叮吁哦哦二對角引長線、卽雙線之漸近線、命叮哂吠角爲角、哦哂吠角爲角、則得

$\text{角切}=\frac{\text{呷}}{\text{𠮙}}$

$\text{角切}=丅\frac{\text{呷}}{\text{𠮙}}$、

惟

$\text{角切}=\frac{\text{角餘弦}}{\text{角弦}}$、

故

$\frac{\text{角餘弦}^{2}}{\text{角弦}^{2}}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{𠮙}^{2}}$、

卽

$\frac{一丅\text{角弦}^{2}}{\text{角弦}^{2}}=\frac{\text{呷}^{2}}{\text{𠮙}^{2}}$、

所以

$\text{角弦}^{2}=\frac{\text{呷}^{2}丄\text{𠮙}^{2}}{\text{𠮙}^{2}}$、

同例得

$\text{角餘弦}^{2}=\frac{\text{呷}^{2}丄\text{𠮙}^{2}}{\text{呷}^{2}}$、

此二式爲漸近線與橫徑交角之式、

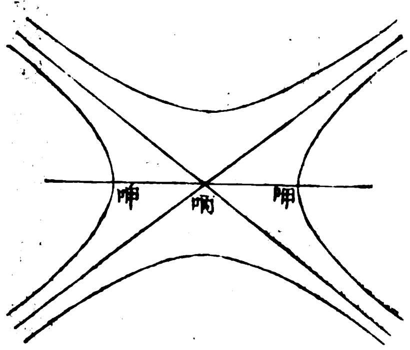
第十五款　雙曲線以中點與漸近線爲準、其式爲

$天地 = \frac{四}{呷^{二}丄吃^{二}}$、呷吃為縱橫二半徑、天地為曲線任一點之縱橫線、

以中點與縱橫二徑為準、其式為

$呷^{二}地^{二}\,丅\,吃^{二}天^{二} = 丅\,呷^{二}吃^{二}$

㊀、（本卷一款）凡易



正交縱橫線為斜交縱橫線、原點不變、則其式為

天＝天角餘弦丄地角餘弦

地＝天角弦丄地角弦、

（三卷十三款）今角＝丨角、故式變為

天＝（天丄地）角餘弦

$$\text{地}=(\text{天}-\text{地})\text{角弦}$$

用此同數于㊀式中、則得

$$\text{甲}^2(\text{天}-\text{地})^2\text{角弦}^2-\text{乙}^2(\text{天}+\text{地})^2\text{角餘弦}^2=-\text{甲}^2\text{乙}^2$$

惟

$$\text{角弦}^2=\frac{\text{甲}^2+\text{乙}^2}{\text{乙}^2}$$

$$\text{角餘弦}^2=\frac{\text{甲}^2+\text{乙}^2}{\text{甲}^2}$$

本卷故式

論

又變為

$$\frac{\text{甲}^2+\text{乙}^2}{\text{甲}^2\text{乙}^2}(\text{天}-\text{地})^2-\frac{\text{甲}^2+\text{乙}^2}{\text{甲}^2\text{乙}^2}(\text{天}+\text{地})^2=-\text{甲}^2\text{乙}^2$$、

即

$$\frac{\text{甲}^2+\text{乙}^2}{\text{四}\text{甲}^2\text{乙}^2}\text{天地}=\text{甲}^2\text{乙}^2$$、

即

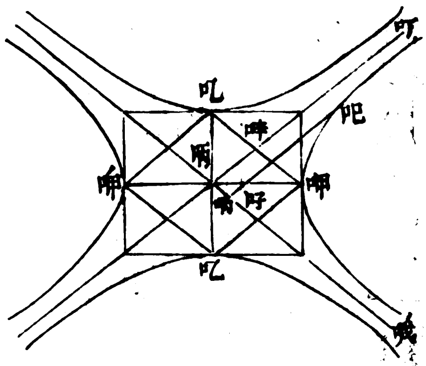
$$\text{天地}=\frac{\text{四}}{\text{甲}^2+\text{乙}^2}$$、

與款合、

系、雙曲線愈長、愈近于漸近線、而永不相遇、本款之式為$地天=\frac{四}{呷^{二}\bot叱^{二}}$、以$嚏^{二}$代右邊數、得$地天=嚏^{二}$、即$地=\frac{天}{嚏^{二}}$、$嚏^{二}$既為常數則地變天必反變、天不至無窮大、地不能至〇、所以漸近線自中點引長之、任至若干遠、與曲線漸相近而永不相遇、故漸近線為曲線無窮界之切線、

第十六款　任自雙線一點作二線、與二漸近線平行、亦以二漸近線為界、成平行四邊形、其面積為

縱橫二徑之矩形八分之一、



二漸近線之交角叮㖀哦命為亢、命吧點之縱橫線為天地、準前款式本卷十五款得 $天地亢弦 = \frac{四}{呷^{二}\perp吃^{二}}亢弦$、此式之左邊、即吧㖀平行邊形、別得 $呷吃 = \sqrt{呷^{二}\perp吃^{二}}$、故呷啐即㖀呍等于 $\frac{二}{\sqrt{呷^{二}\perp吃^{二}}}$ 又呷呍即㖀啐亦等于 $\frac{二}{\sqrt{呷^{二}\perp吃^{二}}}$ 所以得 $㖀啐 \times 㖀呍 = \frac{四}{呷^{二}\perp吃^{二}}$、惟㖀啐呷呍平行四邊形等于

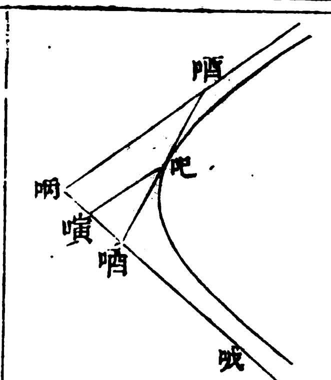
$\frac{哂}{哱}乂\frac{哂}{呼}亢弦$、即等于$\frac{四}{呷^{二}丄吒^{二}}亢弦$故吧哂平行邊形等于哱呼形、為縱橫二半徑矩形之半、即二徑矩形八分之一、

第十七款　以中點及漸近線為準、雙線之切線式為$地丅地=丅\frac{夭}{地}(丅丅夭)$夭地為切點之縱橫線、

過所設二點之直線式為$地丅地=\frac{夭丅矣}{地丅地}(天丅天)$㊀、三卷四款所設二點俱

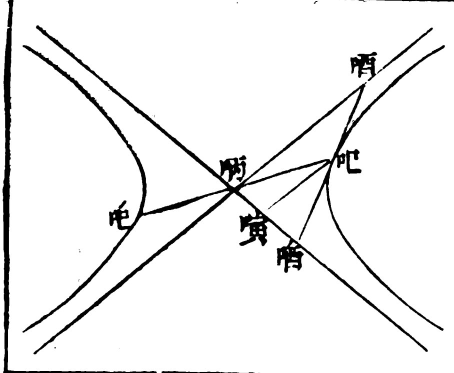
在曲線內、故得 天′地′＝寅² 天″地″＝寅²、本卷十五款系 則 天′地′＝天″地″、此式之兩邊各減天′地″、得 天′地′丅天′地″＝天″地″丅天′地″、即 天′(地′丅地″)＝丅地″(天′丅天″)、即 $\frac{天′丅天″}{地′丅地″}$＝丅$\frac{天′}{地″}$、用此同數于㊀式中、得 地丅地′＝丅$\frac{天′}{地′}$(天丅天′) 設 天″＝天′ 地″＝地′、則過二點之線變為切線、而得 地丅地′＝丅$\frac{天′}{地′}$(天丅天′) 與款合

系、求切線交橫軸之點、令切線式中地＝〇、則得 天＝二天′、故切線與漸近線丙戊交點之橫線丙酉、倍切點之



橫線吶嗔、則吶嗔等于嗔唒、而哂吶唒
吧嗔哂二三角形相似、所以切線哂唒
平分于切點吧、故任作雙線之切線、以
二漸近線爲界、必平分于切點、

第十八款



任作雙線之切線、以二漸近線爲界、必
與切點上徑之相屬徑等、
如圖、哂唒爲曲線吧點之切線、于吧點
作吧吔徑、與漸近線平行、作吧嗔線、成
吧嗔吶吧嗔哂二三角形、命二漸近線

之交角爲亢準三角例有式

$$\frac{吧}{嗔}呐餘弦=\frac{二\frac{呐}{嗔}\times\frac{嗔}{吧}}{\frac{呐^{二}}{嗔}\text{丄}\frac{嗔^{二}}{吧}\text{丅}\frac{呐^{二}}{吧}}、$$

即

$$\text{丅}亢餘弦=\frac{二天地}{天^{二}\text{丄}地^{二}\text{丅}\frac{呐^{二}}{吧}}、$$

又

$$\frac{吧}{嗔}哂餘弦=\frac{二\frac{吧}{嗔}\times\frac{嗔}{哂}}{\frac{吧^{二}}{嗔}\text{丄}\frac{嗔^{二}}{哂}\text{丅}\frac{吧^{二}}{哂}}、$$

即

$$亢餘弦=\frac{二天地}{天^{二}\text{丄}地^{二}\text{丅}\frac{吧^{二}}{哂}}、$$

故得

$$\frac{呐^{二}}{吧}=天^{二}\text{丄}地^{二}\text{丄}二天地亢餘弦$$

$$\frac{吧^{二}}{哂}=天^{二}\text{丄}地^{二}\text{丅}二天地亢餘弦$$

所以

$$\frac{呐^{二}}{吧}\text{丅}\frac{吧^{二}}{哂}=四天地亢餘弦$$

惟

$$亢=二角、$$

故

$$亢餘弦=角餘弦^{二}\text{丅}角弦^{二}、$$

即

$$亢餘弦=\frac{呷^{二}\text{丄}吃^{二}}{呷^{二}\text{丅}吃^{二}}、$$

本卷漸近線論又準前款式

$$天地=\frac{四}{呷^{二}\text{丄}吃^{二}}、$$

本卷十五款即

$$四天地=呷^{二}\text{丄}吃^{二}、$$

所以

$$四天地亢餘弦=呷^{二}\text{丅}吃^{二}、$$

即

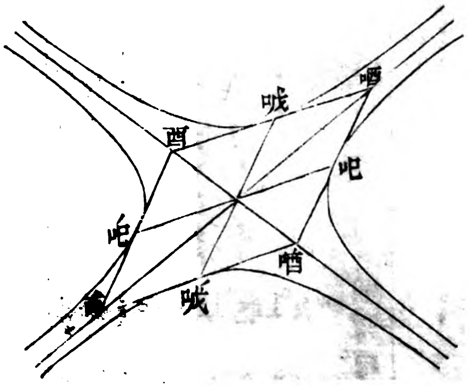
$$\frac{呐^{二}}{吧}\text{丅}\frac{吧^{二}}{哂}=呷^{二}\text{丅}吃^{二}=呷^{二}\text{丅}吃^{二}$$

本卷十二款惟

$$\frac{呐}{吧}=呷$$

是以卮＝吧㖷即知切線㖷㖷與吧吧徑之屬徑等、

系準本款理、于對面曲線吧點之切線酉酉亦合、



故作㖷酉㖷酉二聯線、成㖷酉㖷㖷

平行四邊形、其邊兩兩相等、而與吧

吧呷即二㖪㖪吃即二二線平行、則漸近

線為相屬徑界點四切線所成平行

邊形之對角線、

代微積拾級卷八

米利堅羅密士譔
英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

代數幾何八

諸曲線依代數式分類

前諸卷所論平圜橢圜拋物雙曲諸線之式、皆二次式也、凡二次式之線、俱歸入此四種、

凡二變數二次之公式中函二變數之一方二方、與其相乘數、及太數、如左、

呷地^{2}⊥叱天地⊥吶天^{2}⊥叮地⊥哦天⊥吧＝○　(一)、

第一款　二次公式中二變數之相乘數可易正交二軸之方向而消去之、

依款推之、公式中當用下二同數代天地

天＝天$'$角餘弦丅地$'$角弦

地＝天$'$角弦⊥地$'$角餘弦

(二)、

此易正交二軸之方向而原點不動、（三卷九款）代得式

(呷角餘弦^{二}丅叱角弦角餘弦丄呐角弦)地^{二}丄(呷角弦角餘弦丄叱角餘弦^{二}丅叱角弦^{二}丅二呐角弦角餘弦)天地丄

(呷角弦^{二}丄叱角弦角餘弦丄呐角餘弦^{二})天^{二}丄(叮角餘弦丅戊角弦)地丄(叮角弦丅戊角餘弦)天丄叱═○、

甲、角之同數無一定、則可置角之同數、令甲

式中之第二項消盡、而得

二呷角弦角餘弦丄叱角餘弦^{二}丅叱角弦^{二}丅二呐角弦角餘弦＝〇

卽

(呷丅呐)二角弦角餘弦丄叱(角餘弦^{二}丅角弦^{二})＝〇、

惟

二角弦角餘弦＝(二角)弦

角餘弦^{二}丅角弦^{二}＝(二角)餘弦、

故

(呷丅呐)(二角)弦丄叱(二角)餘弦＝〇、

以(二角)餘弦約之得

(二角)切＝丅$\frac{呷丅呐}{叱}$、

所以若令㊁式中角之倍度正切等于丅$\frac{呷丅呐}{叱}$、則㊎式中天地之項消去而得式

嘻地^{二}丄啊天^{二}丄味地丄呻天丄吧＝〇

㊂、

第二款 二次公式中二變數之一方二項可易一軸之原點而消去之

依款推之前款㊂式中當用下二同數代天地

天⊥甲＝天

地⊥乙＝地

此易原點而新二軸與舊二軸平行（三卷八款）代後得左式

嗔地二⊥𠳐天二⊥（二嗔乙⊥咊）地⊥（二𠳐甲⊥呻）天⊥嗔乙二⊥𠳐甲二⊥咊乙⊥呻甲⊥吧＝〇、

欲天地二項消去、必令

二嗔乙⊥咊＝〇

二𠳐甲⊥呻＝〇、

卽

乙＝丅$\frac{\text{咊}}{\text{二嗔}}$

甲＝丅$\frac{\text{呻}}{\text{二𠳐}}$、

用此同數

代上式甲乙二元、又用吧代丅嗊乙^{二}丅卯甲丅咊乙丅呻甲丄吧、則㊂式變為嗊地^{二}丄卯天^{三}＝○此

式一方二項消去、

㊂式中、若無天或地之項、則得式稍異、如無天項

則卯＝○、而甲之同數必為$\frac{○}{呻}$即無窮、然欲太項消去、

必令嗊乙^{二}丄咊乙丄呻甲丄吧＝○即$甲＝丅\frac{呻}{嗊乙^{二}丄咊乙丄吧}$、用此與$乙＝丅\frac{二嗊}{咊}$之二同數、則得嗊地^{二}丄呻天^{二}＝○、又以吘

代$丅\frac{寅}{呻}$、則地^{二}=吽天、故二變數二次公式可變為寅地^{二}⊥卯天^{二}=吧④、或為

地^{二}=吽天⑤、

④式或表平圜、或表橢圜、或表雙線、

一、設寅卯吧皆為正、而令呷^{二}=$\frac{卯}{吧}$、吃^{二}=$\frac{寅}{吧}$、用此二同數于④

式中、則得$\frac{吃^{二}}{吧地^{二}}⊥\frac{呷^{二}}{吧天^{二}}$=吧、即呷^{二}地^{二}⊥吃^{二}天^{二}=呷^{二}吃^{二}、此為橢圜式、六卷一款若寅=卯、則呷^{二}=吃^{二}、而

為平圜式、

二、設卯吧皆為負、而令呷^{二}=$\frac{卯}{吧}$、吃^{二}=$\frac{寅}{吧}$、用此同數于負④式

$\text{嗔地}^{二}\text{丅卯天}^{二}=\text{一丅吧}$、中、則得$\frac{\text{吃}^{二}}{\text{吧地}^{二}}\text{丅}\frac{\text{呷}^{二}}{\text{吧天}^{二}}=\text{丅吧}$、卽$\text{呷}^{二}\text{地}^{二}\text{丅吃}^{二}\text{天}^{二}=\text{丅呷}^{二}\text{吃}^{二}$、此為雙線式、七卷一款

三、設卯為負、而令$\text{呷}^{二}=\frac{\text{卯}}{\text{吧}}$、$\text{吃}^{二}=\frac{\text{嗔}}{\text{吧}}$、用此同數于較數④式$\text{嗔地}^{二}\text{丅卯天}^{二}=\text{一吧}$中、則得$\frac{\text{吃}^{二}}{\text{吧地}^{二}}\text{丅}\frac{\text{呷}^{二}}{\text{吧天}^{二}}=\text{吧}$卽$\text{呷}^{二}\text{地}^{二}\text{丅吃}^{二}\text{天}^{二}=\text{呷}^{二}\text{吃}^{二}$、此為相屬雙線式、七卷一款又案一

⑤式表拋物線、葢令$\text{乍}=\text{二巳}$則得$\text{地}^{二}=\text{二巳天}$也、五卷一款

所以平圜橢圜拋物雙線而外、更無二次式之曲線、

若縱橫線之原點、在橫徑之界、則橢圜線之式爲$地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(二甲天丅天^{二})$、六卷二款抛物線之式爲$地^{二}=二巳天$、五卷一款雙線之式爲$地^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}(二甲天丄天^{二})$、七卷二款平圜之式爲$地^{二}=二味天丅天^{二}$、四卷二款此諸式俱可變爲$地^{二}=寅天丄卯天^{二}$、在橢圜式爲$寅=二\frac{呷^{二}}{叱}$$卯=丅\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$在抛物線式爲$寅=二巳$$卯=〇$在雙線式爲$寅=二\frac{呷^{二}}{叱}$$卯=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$、在平圜式爲$寅=二味$$卯=丅一$也、各式皆以寅爲曲線之通徑、以卯爲二半徑連比例末率之平方、卯在平圜橢圜爲負、在雙線爲正、在抛物線爲〇、

凡線、準其式之次數、分爲諸類、

一次式

呷地⊥吃天⊥呬=○、

此式惟有直線爲一類、

二次式

呷地^{二}⊥吃天地⊥呬天^{二}⊥叮地⊥哦天⊥叱=○、

此式有平圜線、橢圜線、拋物線、雙曲線、

凡四線、共爲一類、

呷地²丄吼天地丄呐天²丄叮地丄哎天丄吧＝○

（一）、

第一款　二次公式中二變數之相乘數、可易正交二軸之方向而消去之、

依款推之、公式中當用下二同數代天地

天＝天′角餘弦丅地′角弦

地＝天′角弦丄地′角餘弦

（二）、

此易正交二軸之方向而原點不動、三卷九款代得式

(呷角餘弦^{二}丅叱角弦角餘弦丄呐角弦)地^{二}丄(呷角弦角餘弦丄叱角餘弦^{二}丅叱角弦^{二}丅二呐角弦角餘弦)天地丄

(呷角弦^{二}丄叱角弦角餘弦丄呐角餘弦^{二})天^{二}丄(叮角餘弦丅呅角弦)地丄(叮角弦丅呅角餘弦)天丄叱＝○、

甲、角之同數無一定、則可置角之同數、令甲

三次式

呷地^{三}⊥吃地^{二}天⊥呐地天^{二}⊥叮天^{三}⊥呚地^{二}⊥吧地天⊥庚天^{二}⊥哼地⊥呼天⊥啞＝○、

奈端云、凡三次式之線、有四類、合為一

類、其式如下、一

$天地^{二}丄㖡地=呷天^{三}丄吃天^{二}丄呐天丄叮$、

二

$天地=呷天^{三}丄吃天^{二}丄呐天丄叮$、

三

$地^{二}=呷天^{三}丄吃天^{二}丄呐天丄叮$、

四

$地=呷天^{三}丄吃天^{二}丄呐天丄叮$、

此四式中呷吃呐叮㖡諸數、若非令式降次、則或正、或負、或變、俱可、第一類、初有六十五種曲線、後施德靈加四種、狄誇又加四種、共有曲線七十三種、第二類、只有一曲線、奈端名曰三齒線、第三類、有五種曲線、每種內有二線爲抛物支、其中有一乃半立

方拋物線、第四類只有一曲線、乃立方拋物線也、四類共八十種、皆三次式線也、

四次式

唧地^{四}⊥吃地^{三}天⊥呐地^{二}天^{二}⊥叮地天^{三}⊥呔天^{四}

⊥叱地^{三}⊥嗔地^{二}天⊥哼地天^{二}⊥吁天^{三}

⊥吡地^{二}⊥嗔地天⊥啣天^{二}

⊥呻地⊥吘天

⊥味

○歐婁分四次式曲線為一百四十六類、共五千餘種、

五次以上、曲線之種類愈多、未能悉攷也、

凡若干種曲線、共用一未定之公式、則歸一宗、

如橫線與縱線之無論何乘方、有比例、其曲線卽歸拋物線宗、故拋物線之種數無窮、其內有平方拋物線、卽常用之拋物線、其式爲 $地^{二}=甲天$、有立方拋物線、其式爲 $地^{三}=甲天$、有三乘方拋物線、其式爲 $地^{四}=甲天$、四乘以上、可類推、又有半立方拋物線、其式則爲 $地^{三}=甲^{二}天$、又有半三乘方拋物線、其式則爲 $地^{四}=甲^{三}天$、餘可類推、其公式爲 $地^{卯}=甲天$ 是也、

代微積拾級卷九

米利堅羅密士譔

英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

代數幾何九

論越曲線越者超越尋常也

凡曲線分爲二大類、一爲代數曲線、一爲越曲線、曲線之縱橫線相聯屬之理、可以代數顯之、則爲代數曲線、若代數不能顯、必兼用越數顯之、則爲越曲線、

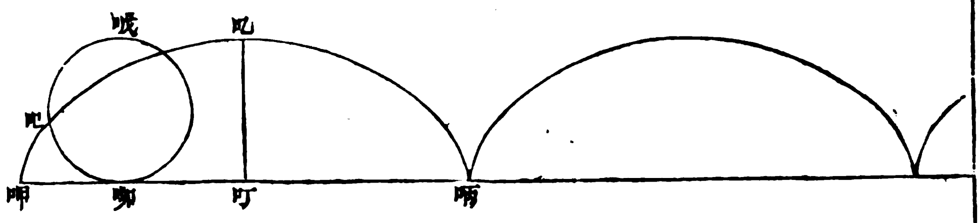
越曲線中、擺線、及對數曲線、為最要之線、對數曲線能顯風氣輕重之理、擺線能顯鐘擺、及墜物向地心之理也、

又有螺線、其中大有精理、

擺線

凡輪依直線輾于平面其周一點所過之道、成擺線、

如圖、戊己卯輪輾于甲丙直線、己為輪周一點、此點所過之道甲乙丙、卽擺線、戊己卯名曰母輪、己點曰母點、



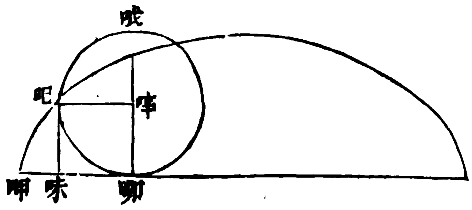
吧點行至呐、已成呷吃呐擺線、再輾、又成第二擺線、與第一同、如此成第三、第四、以至無窮皆然、故輪每一周、卽成一擺線、俱相等、但攷呷吃呐一線、餘可盡知也、

輪輾一周、則周之各點、俱有一時切呷呐直線、而母點必于輾初切呷點、輾末切呐點、故呷呐必等于輪周、呷呐名擺線底、吃叮爲底中點之垂線、名擺線軸、與輪之全徑等、

第一款　擺線之式爲

$天=弧丅\sqrt{二未地丅地^{二}}$

地爲弧之正矢、未爲母輪半徑、



如圖、呷爲縱橫線之原點、吧爲母點、呷吧爲母點所已過擺線一段、喞爲母輪切底之點、呷喞直線必等于吧喞弧線自喞點作喞哦徑、必爲底之垂線、又作吧啐正交哦喞、則吧味必等于吧喞弧之正矢啐喞、

別得

$\frac{哦}{唎}=二未$

$\frac{呷}{味}=天$

$\frac{吧}{味}=\frac{哖}{唎}=地$、

準幾何例、得

$\frac{咊}{唎}=\frac{吧}{哖}$

$=\sqrt{\frac{哖}{唎}\times\frac{哖}{哦}}$

$=\sqrt{地(二未丅地)}$、

$=\sqrt{二未地丅地^{二}}$

又

$\frac{呷}{味}=\frac{呷}{唎}丅\frac{味}{唎}$

$=\frac{吧}{唎}弧丅\frac{吧}{哖}$

用呷味唎味唎三線之同數代之、得

$天=弧丅\sqrt{二未地丅地^{二}}$

與款合、

對數曲線

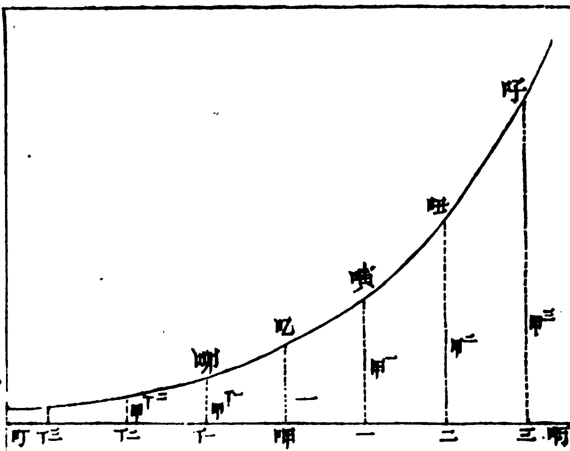
對數曲線、以正交二軸推之、則橫線恆等于縱線之對數、故其式為

$天=地對$

設甲為對數之底、則得

$甲^{天}=地$

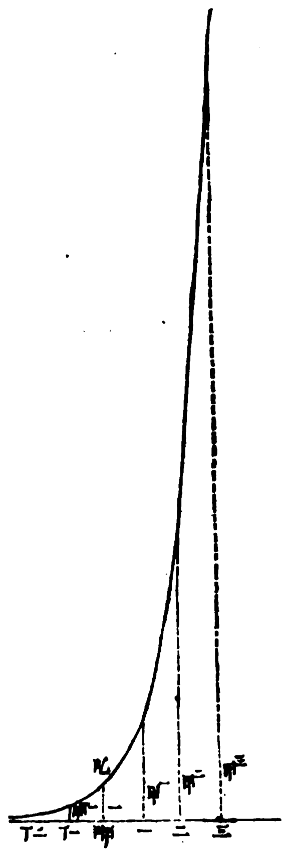
準此式、可取諸點而作對數曲線、



如圖、呷吒正交吶叮、呷吒爲一分、呷吶呷叮爲諸分、皆等于呷吒、取甲一線等于一六、取甲二甲三諸縱線、令與甲之諸方數合、又取甲丁一甲丁二甲丁三諸縱線、與甲之諸負方數合、則呷點右呷一呷二呷三諸橫線、必爲甲一甲二甲三諸縱線之對數、呷點左呷丁一呷丁二呷丁三諸負橫線、必爲甲丁一甲丁二甲丁三諸縱線之負對數、則過縱線端吁啞嗔咖諸點者、即對數曲線、

對數曲線于呷吃之左邊、引長之至無窮、永不遇橫軸、若天爲一定之幾何、則縱線漸小、而不至于〇、若天爲無限、則縱線至無窮小、橫線無窮大而負、故〇之對數爲丅∞、

無論何對數、其曲線之作法同、



如訥白爾之對數、爲

甲^{一}＝二．七一八

甲^{二}＝七．三八九

甲^{三}＝二〇．〇八五

甲^{丅一}＝〇．三六八

甲^{丅二}＝〇．一三五

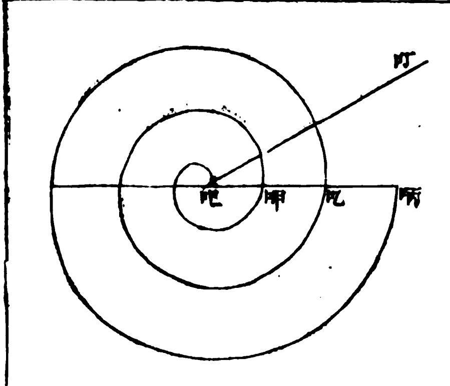
如前取

呷吃縱線及分橫線

諸分俱等一、乃于一點作縱線等于二七一八、于二點作縱線等于七三八九、于丅一點作縱線等于〇三六八、餘倣此、則過縱線端諸點之線、卽訥白爾對數曲線、

螺線

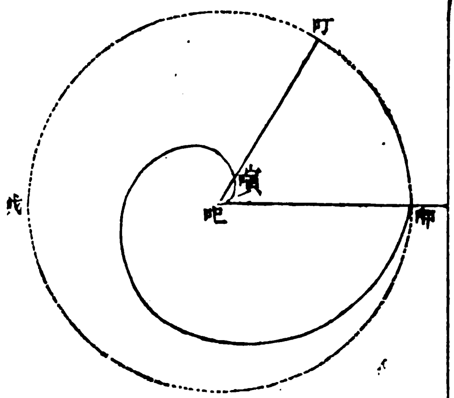
凡點以定法行于直線、而直線以平速繞一端旋轉、



則點所過之道、成螺線、如圖、吧叮爲直線、繞吧點以平速轉、而吧點以定法向叮行、徑過呷吃哂諸點、成曲線、卽螺線也、

中點吧為極、直線吧叮繞極一周、所成曲線名一匝螺線、繞極二周所成名二匝螺線、若繞極不止、則母點必行成無數匝螺線、凡直線過螺線極、其交曲線必有無窮點、

欲知直線繞極度、法以吧為心、以吧呷為半徑、作



呷叮戌平圜、則直線繞極任至何處、從呷點起度其弧、即知若干度也、如直線己行成吧嗔一段曲線、欲知其繞極度、則度呷叮弧、即得、

亞奇默德螺線

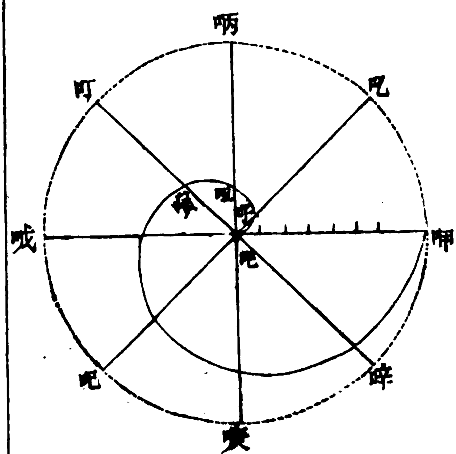
直線以平速繞極、母點以平速行于直線、所成曲線爲亞奇默德螺線、

第二款　亞奇默德螺線之式爲 $未=\frac{二周}{酉}$、未爲帶徑、酉爲帶徑繞極弧、

準本款說、帶徑與繞極弧有比例、 $吧嗔:吧呷::呷叮弧:呷叮戊圜$、 前圖命帶徑吧嗔爲未、吧呷爲甲、呷叮弧爲酉、則得 $未:甲::酉:二周甲$、 故 $未=\frac{二周甲}{甲酉}=\frac{二周}{酉}$、

與款合、

作亞奇氏螺線法

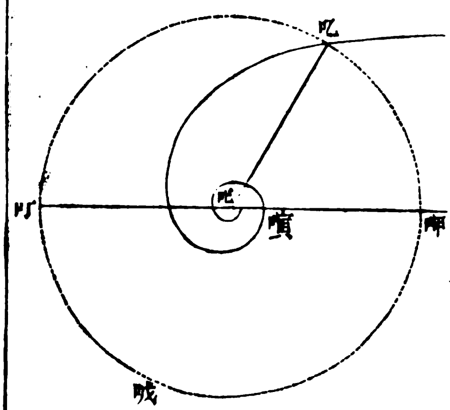


如圖、任平分圜周爲若干分、亦平分半徑爲若干分、周徑之分數必相等、乃于吧吃半徑內取一分、于吧哂內取二分、于吧叮內取三分、以下倣此遞多一分、俱作點識之、過此諸點之曲線、卽亞奇氏螺線、葢吧呼吧啞吧嗊諸帶徑、與呷吃呷哂呷叮諸弧、比例皆同也、

雙曲線螺線

直線以平速繞極、母點以減速退行于直線、令帶徑與繞極弧、恆有反比例、則成雙線螺線、

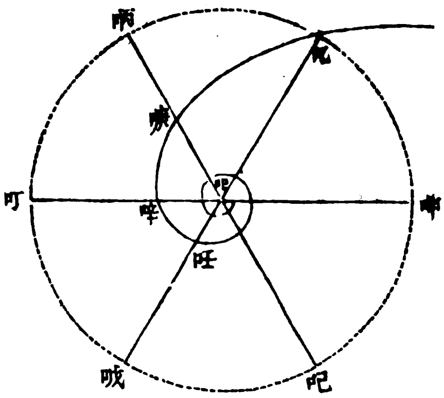
第三款　雙線螺線之式爲$\frac{酉}{甲}$、$一未$　未爲帶徑、酉爲弧、甲爲常數、



準本款說有比例呷吃弧、∶呷吃叮吠圜∷吧嗔∶吧吃命帶徑吧吃爲未、吧嗔爲一、呷吃弧爲酉、則爲酉∶二周∷一∶未、

所以未＝$\frac{酉}{二周}$、命二周爲甲、卽得未＝$\frac{酉}{甲}$與款合、

作雙線螺線法



如圖、任分圜周、爲呷吃吃呐呐叮諸相等分、取吧嗅、等于半吧吃、取吧哔、等于三分吧吃之一、取吧旺、等于四分吧吃之一、餘仿此、則過吃嗅哔旺諸點之曲線、卽雙線螺線、蓋吧吃吧嗅諸帶徑、與呷吃呷呐諸弧、有反比例故也、

案、上二螺線、以未＝甲^{寅}酉^{卯}爲公式、寅卯皆或正或負、蓋$\frac{二周}{酉}$

即甲丁酉、$\frac{酉}{二周}$即甲酉丁也、

對數螺線

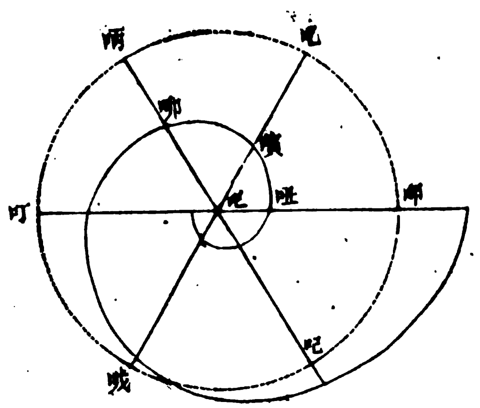
直線以平速繞極、母點于直線上、以減速向極行、令帶徑之對數、與弧恆有比例、則成對數螺線、

第四款　對數螺線之式為對未＝酉、未為帶徑、酉為弧、

觀本款說式自明、無須解、

作對數螺線法

如圖、任分圜周為呷吃吃呐呐叮諸相等分、于分界作諸半徑、遞取吧啞吧嗔吧唧等諸分合皆為



連比例則過丑寅卯諸點之曲線、為對數螺線、葢呷𠮙呷呐諸弧、有遞加之比例、若吧丑吧寅諸率之對數比例故也、

代微積拾級 微

Algebraic Geometry.

2

代微積拾級卷十

米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯

海甯　李善蘭　筆述

微分一

例

微分之數有二、一曰常數、一曰變數、變數以天地人物等字代之、常數以甲乙子丑等字代之、

凡式中常數之同數俱不變、　如直線之式爲　地＝甲天丄乙、　則

線之甲與乙、俱僅有一同數、任在何點永不變、而天與地之同數、則每點皆變也、

凡此變數中函彼變數、則此爲彼之函數、 如直線之式爲 $地=甲天丄乙$、 則地爲天之函數、又平圜之式爲 $地=\sqrt{咊^{二}丅天^{二}}$、 咊爲半徑、天爲正弦、地爲餘弦 橢圜之式爲 $地=\frac{呷}{吃}\sqrt{二呷天丅天^{二}}$、 皆地爲天之函數也、

設不明顯天之函數、但指地爲天之因變數、則如下式、

$天=函(地)$

$地=函(天)$

此天爲地之函數、亦地爲天之函數、

凡函數中有兩變數、則天地外作括弧、亦如上記函字于左、如 $戊 = 甲地 \perp 乙天^{二}$ 作 $戊 = 函(天地)$、此式戊為天地之函數、而但指戊為天地之因變數、

凡變數與常數、成一定同數之函數、謂之陽函數、如 $地 = 甲天^{二} \perp 乙$ 之類是也、

凡變數與常數、成雜糅未明之函數、謂之陰函數、如 $地^{三} \top 三甲地天 \perp 天^{三} = 〇$ 此地為天之函數、須相消而得、

有增函數、變數增、函數亦增、變數損、函數亦損、　如

直線式　$地=甲天\bot乙$、　此式天增地亦增、天損地亦損、

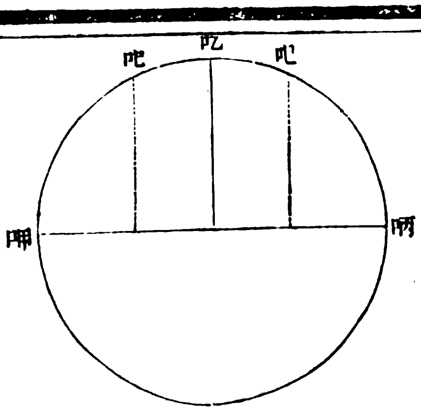
有損函數、變數增、函數反損、變數損、函數反增、　如

平圜式　$地=\sqrt{咊^{二}\top天^{二}}$、　此式天愈小、地愈大、天愈大、地愈小、

二者皆天爲自變數、地爲因變數、葢天一如有一定之同數、地因之而得同數也、

凡變數有限、限者、其數爲變數所漸近、而永不能到、

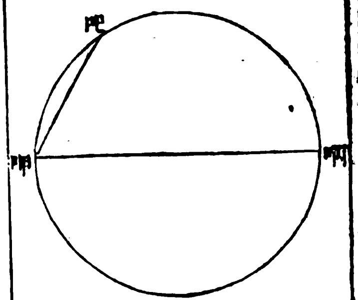
或必不能過、故謂之限、 如圜內作一多等邊形于此形外倍其邊再作一多邊形、如此遞倍遞作、則其積漸近平圜積、然兩積之較可至甚微而終不能等于〇、則圜積爲多邊形積之限、 又如平



圜之式爲 $天^2 丄 地^2 = 味^2$、 準圜吧漸離呷而近吃、則地漸大、至吃而與半徑等、吧漸離吃而近呐、則地漸小、至呐而等于〇、故半徑爲地之限、必不能過、又爲天之限、亦不能過也、

又如以$\frac{一}{九}$變爲小數、得$.一一一一\cdots$、即$\frac{一}{一〇}+\frac{一}{一〇〇}+\frac{一}{一〇〇〇}+\frac{一}{一〇〇〇〇}\cdots$順是以下至無窮漸近$\frac{一}{九}$、而永不能到、則$\frac{一}{九}$爲諸分數和之限、又如$一+\frac{一}{二}+\frac{一}{四}+\frac{一}{八}+\frac{一}{一六}\cdots$順是以下至無窮、漸近二、而永不能到、則二爲諸分數之限、

凡兩數相與漸小、則或向相等之限、或向別比例之限、如圖、吧點向定點呷行、則呷吧弧與呷吧通



弦同時漸小、迨吧點至呷、則所得弧與通弦必俱小于最小可名之數、通弦與弧恆向相等之限、然吧未至呷、兩數任漸小、必不相等也、　又如

$$1\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{1}{28}\cdots$$

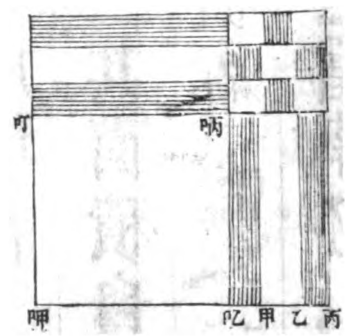
$$1\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{16}\quad\frac{1}{25}\quad\frac{1}{36}\quad\frac{1}{49}\cdots$$

此二級數之比例如下式

$$1\quad\frac{4}{3}\quad\frac{9}{6}\quad\frac{16}{10}\quad\frac{25}{15}\quad\frac{36}{21}\quad\frac{49}{28}\cdots$$

此比例逐級增大、然不能至於二、故上二級數所向比例之限爲二、

此變數以平變漸大、他變數因此變數及常數而變、或為平變、或為增損變、 如直線之式為 $地=二天丄三$ 假令 $天=一$ $天=二$ $天=三$、 則 $地=五$ $地=七$ $地=九$、 此式天平變漸大、地亦平變漸大、 又如拋物線式 $地=\sqrt{四天}$、 設 $天=一$ $天=二$ $天=三$ $天=四$、 則 $地=二.〇〇〇$ $地=二.八二八$ $地=三.四六四$ $地=四.〇〇〇$、 此式天平變漸大、地損變漸大、 又如平方之邊平變漸大、其積增變漸大、以圖明之、呷叱為正方邊、用叱甲甲乙乙丙諸等分漸變大、于每分界作



正方、則呷甲呷叱之二正方較、爲倍呷叱叱甲之矩形加叱甲之正方、而呷乙之正方、又增前之二矩形、三个叱甲之正方、呷丙之正方、又增前之二矩形、五个叱甲之正方、故云平方邊平變大、其面積增變大也、以數明之、如平方邊一尺、每刻變大一寸、則邊自十寸至十一寸、面自一百寸至一百二十一寸、增多二十一寸、邊自十一寸至十二寸、面自一百二十一至一百四十四寸

增多二十三寸、邊自十二至十三寸、面自一百四十四至一百六十九寸、增多二十五寸、餘仿此、所以邊十一寸時、面漸大之比例、速于邊十寸時面漸大之比例也、餘皆然、

本數之增、與增之比例不同、增之比例、以最小時分中所增若干爲率、　如平方之邊自十一增至十二、其面積自一百二十一增至一百四十四、其增積爲二十三、然自邊十一至邊十二之中間、其面之增率必以漸而大、故其比例、若恆同于十一時、

則所得必小于二十三、若恆同于十二時、則所得必大于二十三、葢其比例必漸大漸變、方恰得此二十三焉、所以平方之邊爲平變大、其面爲增變大也、

論函數微分

微分之理、乃詳明函數及自變數、兩變比例相與之比例、

第一款　平方邊變比例與面變比例之比例、若一與倍邊之比例、

試以天為平方邊、則天^{二}為平方面、以辛加邊、得天丄辛、則其面為(天丄辛)^{二}、詳之得天^{二}丄二天辛丄辛^{二}、其邊所長為辛、其面所長為二天辛丄辛^{二}、設以辛為邊變之比例、則二天辛丄辛^{二}為面變之比例、而得邊變率:面變率::辛:二天辛丄辛^{二}、即邊變率:面變率::一:二天丄辛、平方面變比例、必以漸而大、故其所長數二天丄辛必大于天為邊時面變比例之長數、辛愈小、則二天丄辛愈近于天為邊時之長數、若辛等于〇、則

其比例卽爲一與二天、故邊爲天、則邊變比例與面變比例之比若一與倍邊之比也、

以數明之、如平方邊爲十、面爲一百、邊長至十一、面爲一百二十一、長二十一、則邊之長數與面之長數比、若一與二十一比、設邊爲一〇一、面爲一〇二〇一、長二〇一、則邊面二長數比、若〇一與二〇一比、卽若一與二〇一比、設邊爲一〇〇〇一、則邊面二長數比、若一與二〇〇〇一比、觀此、卽明邊之長數愈小、愈近于一與二〇之比、所以一與二〇之比、乃邊爲一〇時二長數之比例、卽一與倍邊之

比例也、

第二款　立方邊變比例與體變比例之比例、若一與三个邊平方之比例、

試以天爲立方邊、以戊爲立方體積、則 $戊=天^{三}$、以辛加邊得 $天+辛$、變體積爲戊′、則得 $戊'=(天+辛)^{三}$、詳之得 $天^{三}+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$、體之長數爲 $戊'-戊=三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$、其邊平長、若體亦平長、則有比例 $三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}:辛::體變比例:邊變比例$、即 $三天^{二}+三天辛+辛^{二}:一::體變比例:邊變比例$、

體積之增、恆以漸而速、故其長數三天^{二}丄三天辛丄辛^{二}、必大于天為

邊時體變比例之長數、設辛愈小、則三天^{二}丄三天辛丄辛^{二}愈近于天

為邊時之長數、若辛為○、則其比例若一與三天^{二}、故

以天為邊、得比例為一與三天^{二}、與款合、

以數明之、設立方之邊十、其積一千、邊變為十一、

積變為一千三百三十一、其長數三百三十一、則

邊與體二長數之比例、為一與三百三十一、若邊

為一〇一、積為一〇三〇三〇一其長數三〇三〇一、邊體二長數之比例為〇一與三〇三〇一、即一與三〇三〇一、若邊為一〇〇一積為一〇〇三〇〇三〇〇一、二長數之比例為一與三〇〇三〇〇一、邊為一〇〇〇一、二長數之比例為一與三〇〇〇三〇〇〇一、觀此、即明邊之長數愈小、二長數之比例、愈近于一與三〇〇、故邊為十、其比例必得一與三〇〇、即一與三个邊之平方也、

函數與變數之變比例、俱謂之微分、用彳號記之、

如 $戌=天^{三}$、則得比例 $彳戌:彳天::一:三天^{二}$ 彳天彳戌為天與戌之微分、後皆仿此、用表天與戌之變比例、以一四兩率相乘、二三兩率相乘、則得 $彳戌=三天^{二}彳天$、 此顯函數戌之變比例、等于三天二乘變數天之變比例、以彳天約之得 $\frac{彳戌}{彳天}=三天^{二}$、 此顯變數之變比例約函數之變比例、等于函數之微係數也、

如戌為天之函數、三天二為戌之微係數、此舉立方以槩其餘、

微長數、因之得函數之長數、乃以變數之長數屢變、觀其變比例漸近之限、則知長數爲〇、方至限、是限者、乃自變數爲天時兩變比例之比例卒也、求微分之係數、雖以辛爲〇、然不得云伕彶皆等于〇、蓋彶爲函數戊之變比例、伕爲變數天之變比例、而旣得兩變數比例之比例、其同數無論所以伕可任小任大也、

第三款　設$戊=天^{四}$、則其微係數爲$四天^{三}$、無論長數若干、命爲辛、加于天、所變之函數、命爲

戌、則得 $戌' = (天 \perp 辛)^{四}$ 詳之得 $戌' = 天^{四} \perp 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$、以原式 $戌 = 天^{四}$ 減之、得 $戌' \mathrm{T} 戌 = 四天^{三}辛 \perp 六天^{二}辛^{二} \perp 四天辛^{三} \perp 辛^{四}$、以辛約之、得 $\frac{戌' \mathrm{T} 戌}{辛} = 四天^{三} \perp 六天^{二}辛 \perp 四天辛^{二} \perp 辛^{三}$、此為函數戌與變數天兩長數之比例率、第一項 $四天^{三}$ 無辛、故辛任為若干、第一項總不變、後諸項俱為辛之因變數、辛漸小、則右邊數漸近于

$四天^{三}$、辛爲○、則至$四天^{三}$矣、故自變數爲天之時、則自變數與函數兩變比例之比例爲$四天^{三}$、所以$\frac{彳天}{彳戊}=四天^{三}$、準此、一切獨變數函數之微係數可類推、法任以長數若干加于自變數、求得函數之同數、以原式減之、又以辛約之、乃令辛爲○而求比例之限、所得卽微係數、

設題

今有天平變大、逐秒增二寸、若天爲六寸、求$二天^{三}$變大之比例若干、答曰、一秒中四十八寸、

今有天平變大、逐秒增三寸、若天爲十寸、求$\sqrt[四]{天^{三}}$變大之比例若干、答曰、一秒中一千五百九十六寸、

今有天平變大、逐秒增五寸、若天爲四寸、求$\sqrt[二]{天^{四}}$變大之比例若干、答曰、二千五百二十二寸、

第四款　求變數諸乘方之微分、取其指數減一、以原指數乘之、又以元之微分乘之、卽得、

設

$$戊=天^{卯}$$

、天變爲

$$天丄辛$$

則得

$$戊=(天丄辛)^{卯}$$

、詳之、得式

$$戊=天^{卯}丄卯天^{卯丅一}辛丄\frac{二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}辛^{二}丄\cdots$$

以原式減之、

得

$$戊'丅戊=卯天^{卯丅一}辛\perp\frac{二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}辛^{二}\perp\cdots$$、

以辛約之、得

$$\frac{辛}{戊'丅戊}=卯天^{卯丅一}\perp\frac{二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}辛^{二}\perp\cdots$$、

此爲函數變數二長數之比例、若令辛等于〇、則右邊第二項以下、皆變爲無、蓋皆因辛而得、辛既無、則亦無也、所以

$$\frac{彳天}{彳戊}=卯天^{卯丅一}$$、

而

$$彳戊=卯天^{卯丅一}彳天$$、

與款合、

第五款　變數常數相乘積之微分、等于變數微分乘常數、

設$戊=甲天^{四}$、天變爲$天丄辛$、則得$戊=甲天^{四}丄四甲天^{三}辛丄六甲天^{二}辛^{二}丄\cdots$以原式減之、得$戊丅戊=四甲天^{三}辛丄六甲天^{二}辛^{二}丄\cdots$、以辛約之、得$\frac{辛}{戊丅戊}=四甲天^{三}丄六甲天^{二}辛丄\cdots$、若辛爲○、則右數只賸首項、餘項俱無、而

得 $戌丅戌=卯天^{卯丅一}辛丄\frac{二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}辛^{二}丄\cdots$ 以辛約之、得 $\frac{辛}{戌丅戌}=卯天^{卯丅一}丄\frac{二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}辛^{二}丄\cdots$、此爲函數變數二長數之比例、若令辛等于〇、則右邊第二項以下、皆變爲無、蓋皆因辛而得、辛既無、則亦無也、所以 $\frac{彳天}{彳戌}=卯天^{卯丅一}$、而 $彳戌=卯天^{卯丅一}彳天$、與款合、

第五款　變數常數相乘積之微分、等于變數微分乘常數、

乘常數、

設 戊＝甲天^{四}、天變爲 天丄辛、則得 戊＝甲天^{四}丄四甲天^{三}辛丄六甲天^{二}辛^{二}丄… 以原式減之、得 戊丅戊＝四甲天^{三}辛丄六甲天^{二}辛^{二}丄…、以辛約

之、得 $\frac{辛}{戊丅戊}$＝四甲天^{三}丄六甲天^{二}辛丄…、若辛爲〇、則右數只賸首項、餘項俱無、而

得 $\frac{伕}{彼}=四甲天^{三}$、以伕乘之、得 $彼=四甲天^{三}伕$、即 $甲天^{四}$ 之微分、與 $天^{四}$ 之微分乘

甲等、

第六款

常數無微分、故常數變數相加減之數、求得微分、其常數不見、

設 $戊=乙丄天^{四}$、天變為 $天丄辛$、得 $戊=乙丄天^{四}丄四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄\cdots$、以原式減之、得 $戊丅戊=四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄\cdots\cdots$、以辛約之

得$\frac{辛}{戊丅戊}=四天^{三}丄六天^{二}辛丄\cdots\cdots$、辛等于〇、則得$\frac{彳天}{彳戊}=四天^{三}$、以彳天乘之、得$彳戊=四天^{三}彳天$、是微分中常數乙不見也、

設題

今有$五甲天^{三}$、試求其微分、　答式　$一五甲天^{二}彳天$、

今有$\frac{四}{三}天^{二}丄乙$、試求其微分、　答式　$\frac{二}{三}天彳天$、

今有$三天^{五}$、試求其微分、　答式　$一五天^{四}彳天$、

今有七甲^{二}天^{六}丄乙^{三}、試求其微分、答式四二甲^{二}天^{五}彳天、

今有四甲乙^{二}天^{八}丅丙、試求其微分、答式三二甲乙^{二}天^{七}彳天、

今有三甲^{三}丙天^{九}丅丁、試求其微分、答式二七甲^{三}丙天^{八}彳天、

第七款　以戊為天之函數、天變為天丄辛、則所得函數、必為三者所合、一、原函數戊、二、原函數之微係數乘辛、三、天辛二元之函數乘辛平方、

準前款、本卷四款戊為天之函數、若天變為天丄辛、則變函

數之同數爲級數、依辛之諸乘方詳之、得

戊＝呷丄叱辛丄呐辛^{二}丄叮辛^{三}丄……、

若辛爲〇、則同數變爲呷、而左數爲戊、故

呷＝戊、

相代得式

戊＝戊丄叱辛丄呐辛^{二}丄叮辛^{三}丄……、

化之得

戊＝戊丄叱辛丄辛（呐丄叮辛丄……）、

以呐爲天與辛之函數代

呐丄叮辛丄……、

得

戊＝戊丄叱辛丄呐辛^{二}、

移

今有七甲^{二}天^{六}丄乙^{三}、試求其微分、答式四二甲^{二}天^{五}彳天、

今有四甲乙^{二}天^{八}丅丙、試求其微分、答式三二甲乙^{二}天^{七}彳天、

今有三甲^{三}丙天^{九}丅丁、試求其微分、答式二七甲^{三}丙天^{八}彳天、

第七款　以戊爲天之函數、天變爲天丄辛、則所得函數、必爲三者所合、一、原函數戊、二、原函數之微係數乘辛、三、天辛二元之函數乘辛平方、

準前款、本卷四款、戊爲天之函數、若天變爲天丄辛、則變函

數之同數爲級數、依辛之諸乘方詳之、得

戊＝呷丄叱辛丄哂辛^{二}丄叮辛^{三}丄……、

若辛爲〇、則同數變爲呷、而左數爲戊、故

呷＝戊、

相代得式

戊＝戊丄叱辛丄哂辛^{二}丄叮辛^{三}丄……、

化之得

戊＝戊丄叱辛丄辛(哂丄叮辛丄……)、

以哂爲天與辛之函數代

哂丄叮辛丄……、

得

戊＝戊丄叱辛丄哂辛^{二}、

移

戊而以辛約之、得$\frac{\text{辛}}{\text{戊丅戊}}$＝叱丄呐辛若辛等于〇、則得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}$＝叱、是叱為函數之微係數也、故變函數戊之同數、為原函數戊、及函數之微係數乘辛、及天辛二元之函數乘辛二、三數之和、

後凡論變函數之同數式、如下戊＝戊丄呐辛丄叱辛二、

第八十款

同變數若干函數和較數之微分、等于各

函數微分之和較、

設戊爲諸函數之和較數、如式戊＝地丄人丅亥、地人亥皆天之函數、天變爲天丄辛、則得式戊丅戊＝(地丅地)丄(人丅人)丅(亥丅亥)、準前地丅地可變爲呷辛丄叱辛^{二}、本卷七款後例又人丅人可變爲呷辛丄叱辛^{二}、亥丅亥可變爲呷辛丄叱辛^{二}、用此三變數、得下

式

戊″丅戊＝（呷辛丄吃辛）丄（呷′辛丄吃′辛）丅（呷″辛丄吃″辛）、

以辛約之得

$\frac{辛}{戊″丅戊}$＝（呷丄吃辛）丄（呷′丄吃′辛）丅（呷″丄吃″辛）、

辛同于〇、則得

$\frac{伕}{彶}$＝呷丄呷′丅呷″、

以伕乘之、得下式

彶＝呷伕丄呷′伕丅呷″伕、

呷伕為地之微分、呷′伕為人之微分、呷″伕為亥之微分、故得式

彶＝弛丄仈丅咳、

與款合、

設題

今有六天^{四}丅五天^{三}丅二天、試求其微分、答式（二四天^{三}丅一五天^{二}丅二）彳天、

今有甲天^{二}丅丙天、試求其微分、答式（二甲天丅丙）彳天、

今有三甲天^{三}丅乙天^{四}、試求其微分、答式（九甲天^{二}丅四乙天^{三}）彳天、

今有五天^{三}丅三天^{二}丄六天丄二、試求其微分、答式（一五天^{二}丅六天丄六）彳天、

今有$甲^{六}丄三甲^{四}天^{二}丄三甲^{二}天^{四}丄天^{六}$、試求其微分、答式$(六甲^{四}天丄一二甲^{二}天^{三}丄六天^{五})彳天$、

今有$七天^{五}丄六天^{三}丅五甲天^{二}丄三天丅六$、試求其微分、答式$(三五天^{四}丄一八天^{二}丅一〇甲天丄三)彳天$、

第九款　同變數兩函數相乘積之微分、等于兩函數互乘兩微分之和、

試以戊亥爲天之二函數、天變爲天⊥辛、則得戊=戊⊥呷辛⊥吃辛二、亥=亥⊥呻辛⊥吃辛二、以此二式之兩邊各相乘、得下式

戊亥=戊亥⊥呷亥辛⊥吃亥辛二

⊥呻戊辛⊥呷呻辛二⊥…

⊥吃戊辛二⊥…、

其餘項依此遞推、可得辛三以上之諸辛項、此式移項而以辛約之、得

$\frac{辛}{戊亥丅戊亥}$=呷亥⊥呻戊⊥…、

除呷亥 呻戊 二項外、餘皆爲辛之項、若辛同

于〇、則辛項俱無、而得$\frac{伏}{彳(戊亥)}=呷亥⊥呻戊$、以伏乘之、得$彳(戊亥)=(呷亥⊥呻戊)伏$、即$彳(戊亥)=呷亥伏⊥呷戊伏$、呷伏與彳戊等、呻伏與彳亥等、故$彳(戊亥)=亥彳戊⊥戊彳亥$、與款合、

系、本款式以戊亥約之、得$\frac{戊亥}{彳(戊亥)}=\frac{戊}{彳戊}⊥\frac{亥}{彳亥}$、故兩函數相乘積之微分、以積約之、等于兩函數各約其微分之和、

設題

今有天地^{二}、試求其微分、

答式

地^{二}彳天丄二天地彳地、

今有天^{二}地^{二}、試求其微分、

答式

二地^{二}天彳天丄二天^{二}地彳地、

今有甲天^{二}地^{三}、試求其微分、

答式

二甲天地^{三}彳天丄三甲天^{二}地^{二}彳地、

今有甲天^{三}(天^{二}丄二乙)、試求其微分、

答式(三甲天^{二}(天^{二}丄二乙)丄甲天^{三}二天)彳天、

即(五甲天^{四}丄六乙甲天^{二})彳天、

今有(天^{二}丄甲)(二天丄乙)、試求其微分、

答式{二天(二天丄乙)丄二(天^{二}丄甲)}彳天、

今有(天^{二}丄甲)(三天^{二}丄乙)、試求其微分、

答式{三天(三天^{二}丄乙)丄六天(天^{二}丄甲)}彳天、

第十款　同變數若干函數連乘積之微分、等于各函數之微分互乘餘函數連乘積之和、

試以戊亥人為天之三函數、而以地代亥人、則得式

戊亥人＝戊地

彳(戊亥人)＝彳(戊地)、

準前款

彳(戊地)＝地彳戊⊥戊彳地、

本卷九款　地等于亥人、則依例得式

彳地＝人彳亥⊥亥彳人、

以此同數代彳地、以亥人代地、則上式變為

彳(戊亥人)＝亥人彳戊⊥戊人彳亥⊥戊亥彳人、

與款合、無

論若干函數、皆同、

系、本款式以 戊亥人 約之、得 $\frac{\text{戊亥人}}{\text{彳}(\text{戊亥人})}=\frac{\text{戊}}{\text{彳戊}}\perp\frac{\text{亥}}{\text{彳亥}}\perp\frac{\text{人}}{\text{彳人}}$、與前款理同、

設題

今有 $\text{天}^{二}\text{地}^{二}\text{人}^{三}$、試求其微分、

答式

$\text{二天地}^{二}\text{人}^{三}\text{彳天}\perp\text{天}^{二}\text{二地人}^{三}\text{彳地}\perp\text{三天}^{二}\text{地}^{二}\text{人}^{二}\text{彳人}$、

今有$甲天地^{三}人^{二}$、試求其微分、

答式$甲地^{三}人^{二}彳天丄三甲天地^{二}人^{二}彳地丄二甲天地^{三}人彳人$、

今有$天(天^{二}丄甲)(天丄二乙)$、試求其微分、

答式$(天^{二}丄甲)(天丄二乙)彳天丄二天^{二}(天丄二乙)彳天丄天(天^{二}丄甲)彳天$、

即$\{(天^{二}丄甲)(天丄二乙)丄二天^{二}(天丄二乙)丄天(天^{二}丄甲)\}彳天$、

論若干函數皆同、

系、本款式以戊亥人約之、得$\frac{戊亥人}{彳(戊亥人)}=\frac{戊}{彳戊}\perp\frac{亥}{彳亥}\perp\frac{人}{彳人}$、與前款理同、

設題

今有$天^{二}地^{二}人^{三}$、試求其微分、

答式

$二天地^{二}人^{三}彳天\perp天^{二}二地人^{三}彳地\perp三天^{二}地^{二}人^{二}彳人$、

今有

$甲天地^{二}人^{三}$、

試求其微分、

答式

$甲地^{三}人^{三}彳天 \perp 三甲天地^{二}人^{三}彳地 \perp 三甲天地^{三}人^{二}彳人$、

今有

$天(天^{二} \perp 甲)(天 \perp 二乙)$、

試求其微分、

答式

$(天^{二} \perp 甲)(天 \perp 二乙)彳天 \perp 二天(天 \perp 二乙)彳天 \perp 天(天^{二} \perp 甲)彳天$、

即

$\{(天^{二} \perp 甲)(天 \perp 二乙) \perp 二天(天 \perp 二乙) \perp 天(天^{二} \perp 甲)\}彳天$、

論若干函數皆同、

系、本款式以戊亥人約之、得$\frac{戊亥人}{彳(戊亥人)}=\frac{戊}{彳戊}\perp\frac{亥}{彳亥}\perp\frac{人}{彳人}$、與前款理同、

設題

今有$天^{二}地^{二}人^{三}$、試求其微分、

答式

$二天地^{二}人^{三}彳天\perp天^{二}二地人^{三}彳地\perp三天^{二}地^{二}人^{二}彳人$、

今有甲天地^{三}人^{三}、試求其微分、

答式

甲地^{三}人^{三}彳天⊥三甲天地^{二}人^{三}彳地⊥三甲天地^{三}人^{二}彳人、

今有天(天^{二}⊥甲)(天⊥二乙)、試求其微分、

答式

(天^{二}⊥甲)(天⊥二乙)彳天⊥二天^{二}(天⊥二乙)彳天⊥天(天^{二}⊥甲)彳天、

即

《(天^{二}⊥甲)(天⊥二乙)⊥二天^{二}(天⊥二乙)⊥天(天^{二}⊥甲)》彳天、

今有天地^{二}人、試求其微分、

答式地^{二}人彳天丄二天地人彳地丄天地^{二}彳人、

今有甲天^{二}(天^{三}丄甲)(天丄三乙)、試求其微分、

答式{二甲天(天^{三}丄甲)(天丄三乙)丄三甲天^{四}(天丄三乙)丄甲天^{二}(天^{三}丄甲)}彳天、

第十一款　求分數之微分、法以分母乘分子之微分、而以分子乘分母之微分減之、爲微分之子、以分母之平方爲微分之母、

設分數爲$\frac{\text{亥}}{\text{戊}}$、令$\frac{\text{亥}}{\text{戊}}=\text{地}$、則$\text{戊}=\text{亥地}$、準前得$\text{彳戊}=\text{地彳亥}\,丄\,\text{亥彳地}$、本卷九款所以$\text{亥彳地}=\text{彳戊}\,丅\,\text{地彳亥}$、以地之同數代地、則得$\text{亥彳地}=\text{彳戊}\,丅\,\frac{\text{亥}}{\text{戊彳亥}}$、以亥約之、得$\text{彳地}=\frac{\text{亥}^{二}}{\text{亥彳戊}\,丅\,\text{戊彳亥}}$、即$\text{彳}\left(\frac{\text{亥}}{\text{戊}}\right)=\frac{\text{亥}^{二}}{\text{亥彳戊}\,丅\,\text{戊彳亥}}$、與款合、

系、若戊爲常數丙、其微分爲○、則得式$\text{彳}\left(\frac{\text{亥}}{\text{丙}}\right)=\frac{\text{亥}^{二}}{丅\,\text{丙彳亥}}$、

設題

今有$\dfrac{\text{地}^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{二}}}$、試求其微分、

答式$\dfrac{\text{地}^{\text{六}}}{\text{二天地}^{\text{三}}\text{彳天丁三天}^{\text{二}}\text{地}^{\text{二}}\text{彳地}}$、以地$^{\text{二}}$約之、得$\dfrac{\text{地}^{\text{四}}}{\text{二天地彳天丁三天}^{\text{二}}\text{彳地}}$、

今有$\dfrac{\text{天}^{\text{卯}}}{\text{甲}}$、試求其微分、

答式$\dfrac{\text{天}^{\text{二卯}}}{\text{丁卯甲天}^{\text{卯丁一}}\text{彳天}}$、

今有$\dfrac{\text{甲天}^{\text{三}}}{\text{丙}}$、試求其微分、

答式$\dfrac{\text{甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{六}}}{\text{丁三甲丙天}^{\text{二}}\text{彳天}}$

今有$\dfrac{\text{一丅天}}{\text{天}}$、試求其微分、　答式$\dfrac{\text{一丅二天丄天}^{\text{二}}}{(\text{一丅天})\text{彳天丅天彳天}}$、

今有$\dfrac{\text{一丅天}^{\text{二}}}{\text{一丄天}^{\text{二}}}$、試求其微分、　答式$\dfrac{\text{一丅二天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}}}{\text{四天彳天}}$、

今有$\dfrac{\text{乙}^{\text{二}}\text{丅天}^{\text{二}}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{二}}}$、試求其微分、　答式$\dfrac{\text{乙}^{\text{四}}\text{丅二乙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}}}{(\text{二乙}^{\text{二}}\text{天丅二天}^{\text{三}}\text{丄二甲}^{\text{二}}\text{天丄二天}^{\text{三}})\text{彳天}}$、即$\dfrac{\text{乙}^{\text{四}}\text{丅二乙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}}}{\text{二}(\text{乙}^{\text{二}}\text{丄甲}^{\text{二}})\text{天彳天}}$。

第十二款　求變數諸乘方之微分、置乘方數、將其

指數減一、以原指數乘之、又以變數之微分乘之、即得、

設有$天^{卯}$求其微分、卯無論爲正爲負爲整數爲分數統歸一例、

一、設卯爲正整數、則$天^{卯}$爲天卯次連乘一所得之數、準前得式

$$\frac{天^{卯}}{彳(天^{卯})}=\frac{天天天天\cdots\cdots}{彳(天天天天\cdots\cdots)}=\frac{天}{彳天}\perp\frac{天}{彳天}\perp\cdots$$

、本卷十款系左數之母子各有卯个天、

則右數亦必有卯項、故得式 $\frac{天^{卯}}{彳(天^{卯})} = \frac{天}{卯彳天}$、變作 $彳(天^{卯}) = 卯天^{卯丅一}彳天$、

二、設卯爲正分數、如 $\frac{申}{未}$、則 $戊 = 天^{\frac{申}{未}}$、各自乘申次、得 $戊^{申} = 天^{未}$、未申俱爲整數、故有式 $申戊^{申丅一}彳戊 = 未天^{未丅一}彳天$、即 $彳戊 = \frac{申戊^{申丅一}}{未天^{未丅一}}彳天 = \frac{申天^{\frac{申}{未}(申丅一)}}{未天^{未丅一}}彳天$、變作 $彳戊 = \frac{申}{未}天^{\frac{申}{未}丅一}彳天$、以卯代 $\frac{申}{未}$、得 $彳戊 = 卯天^{卯丅一}彳天$、

三、設卯爲負、不論整分、如 $戊 = 天^{丅卯}$、可變作 $戊 = \frac{天^{卯}}{一}$、依前求微

分、得$彳地=\frac{天^{二卯}}{丅彳(天^{卯})}$、本卷十一款系依本款第一條、得$彳地=\frac{天^{二卯}}{丅卯天^{卯丅一}彳天}$、以母之指數

二卯減子之指數卯丅一、得$彳地=丅卯天^{丅卯丅一}彳天$、以卯代丅卯、得$彳地=卯天^{卯丅一}彳天$、

故本款可該一切乘方之理、

設題

今有$甲天^{卯丄一}$、求微分、答式$甲(卯丄一)天^{卯}彳天$、

今有$\frac{乙}{甲}天^{\frac{卯}{二}}丄丙$、求微分、答式$\frac{乙}{甲}\times\frac{卯}{二}天^{\frac{卯}{二}丅一}彳天$、

今有甲乙二天三二求微分、答式三甲乙天丁三二三、

今有乙天五三、求微分、答式五三乙天丁三二彳天、

今有丙天丁三、求微分、答式丁三丙天丁四彳天、

今有天二地三人三求微分、答式二天地三人三彳天丄三天二地丁二三人二彳地丄三天二地三人二彳人、

今有正方面平變大、一秒中增十分方寸之一、當面爲一百方寸時、邊之變大比例若干、

答曰、二百分寸之一、

今有正方體平變大、一秒中增體積一寸、當體之積爲一尺時、邊之變大比例若干、

答曰、三百分寸之一、

第十三款　變數平方根之微分、等于變數之微分以倍根約之、

如 $\sqrt{天}$ 即 $天^{\frac{一}{二}}$、準前二款（本卷十）得式

$$彳(天^{\frac{一}{二}})=\frac{一}{二}天^{\frac{一}{二}-一}彳天=\frac{一}{二}天^{-\frac{一}{二}}彳天$$

即 $\frac{彳天}{二\sqrt{天}}$、與款合、

設題

今有$\sqrt{\text{甲天}^{\text{三}}}$、試求其微分、答式$\frac{\text{二}\sqrt{\text{甲天}^{\text{三}}}}{\text{三甲天}^{\text{二}}\text{彳天}}$、即$\frac{\text{二}}{\text{三}}\text{甲}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{天}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{彳天}$、

今有$\sqrt{\text{甲乙天}^{\text{七}}}$、試求其微分、答式$\frac{\text{二}\sqrt{\text{甲乙天}^{\text{七}}}}{\text{七甲乙天}^{\text{六}}\text{彳天}}$、即$\frac{\text{二}}{\text{七}}\text{甲}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{乙}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{天}^{\frac{\text{二}}{\text{五}}}\text{彳天}$、

今有$\sqrt{\text{甲天}^{\text{五}}}$、試求其微分、答式$\frac{\text{二}\sqrt{\text{甲天}^{\text{五}}}}{\text{五甲天}^{\text{四}}\text{彳天}}$、即$\frac{\text{二}}{\text{五}}\text{甲}^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{天}^{\frac{\text{二}}{\text{三}}}\text{彳天}$、

今有$\text{甲}\sqrt{\text{天}}\top\sqrt[\text{三}]{\text{天}}$、試求其微分、答式$\frac{\text{二}\sqrt{\text{天}}}{\text{甲彳天}}\top\frac{\text{三}}{\text{彳天}}$、

今有$\sqrt{\text{甲天}}\perp\sqrt{\text{丙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{三}}}$、試求其微分、答式$\frac{\text{二}\sqrt{\text{甲天}}}{\text{甲彳天}}\perp\frac{\text{二}\sqrt{\text{丙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{三}}}}{\text{三丙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{彳天}}$、

第十四款　凡多項數之若干乘方、求微分法、置多項數之乘方、將其指數減一、卽以原指數爲係數、又以多項數之微分乘之、卽得、

如函數爲 $\text{戊}=(\text{甲天}\perp\text{天}^{二})^{\text{卯}}$、以地代 $\text{甲天}\perp\text{天}^{二}$、則得 $\text{戊}=\text{地}^{\text{卯}}$、準前得 $\text{彳戊}=\text{卯地}^{\text{卯丅一}}\text{彳地}$、本卷十二款

易以地之同數、得 $\text{彳戊}=\text{卯}(\text{甲天}\perp\text{天}^{二})^{\text{卯丅一}}\text{彳}(\text{甲天}\perp\text{天}^{二})$、式中 $\text{彳}(\text{甲天}\perp\text{天}^{二})$ 詳之、則式變爲 $\text{彳戊}=\text{卯}(\text{甲天}\perp\text{天}^{二})^{\text{卯丅一}}(\text{甲}\perp\text{二天})\text{彳天}$、與

款合、

設題

今有$\sqrt{甲丄乙天^{二}}$、試求其微分、答式$\frac{二\sqrt{甲丄乙天^{二}}}{二乙天彳天}$、即$\frac{\sqrt{甲丄乙天^{二}}}{乙天彳天}$、

今有$(甲天^{二}丄天^{三})^{\frac{一}{三}}$、試求其微分、答式$三(甲天^{二}丄天^{三})^{\frac{二}{三}}彳(甲天^{二}丄天^{三})$、即$三(甲天^{二}丄天^{三})^{\frac{二}{三}}(二甲天丄三天^{二})彳天$、

今有$\sqrt{甲天丄乙天^{二}丄丙天^{三}}$、試求其微分、答式$\frac{二\sqrt{甲天丄乙天^{二}丄丙天^{三}}}{(甲丄二乙天丄三丙天^{二})彳天}$、

今有$(甲丅天^{二})^{五}$、試求其微分、

答式

$五(甲天丅天^{二})^{四}彳(甲天丅天^{二})$、

卽

$五(甲天丅天^{二})^{四}(甲丅二天)彳天$、

今有$(甲上乙天^{二})^{\frac{四}{五}}$、試求其微分、

答式

$\frac{四}{五}(甲上乙天^{二})^{\frac{四}{一}}彳(甲上乙天^{二})$、

卽

$\frac{四}{五}(甲上乙天^{二})^{\frac{四}{一}}二乙天彳天$、

今有$(甲上天^{二})^{\frac{卯}{二}}$、試求其微分、

答式

$\frac{卯}{二}(甲上天^{二})^{\frac{卯}{二丅卯}}彳(甲上天^{二})$、

卽

$\frac{卯}{二}(甲上天^{二})^{\frac{卯}{二丅卯}}二天彳天$、

今有天平變大一秒中增一百分寸之一、當天爲九寸時、$(一丄天)^{二}$之變比例若干、

答曰三寸、

用前諸款、可駁函數求微分諸繁重題、設題如左、

今有$戊=\frac{甲丄天^{二}}{甲丄天}$、試求其微分、準十一款得$彳戊=\frac{(甲丄天)^{二}}{(甲丄天^{二})彳天丅二天(甲丄天)彳天}$、變之、得$彳戊=\frac{(甲丄天)^{二}}{(甲丅二甲天丅天^{二})彳天}$、

今有$戊=\sqrt{天^{二}丄甲\sqrt{天}}$、試求其微分、準十三款得$彳戊=\frac{二\sqrt{天^{二}丄甲\sqrt{天}}}{(二天丄甲\frac{二\sqrt{天}}{一})彳天}$、

今有$戊=\frac{天}{(乙丄天)^{三}}$、試求其微分、準十一款得$彳戊=\frac{天^{二}}{二(乙天丄天^{二})彳天丅(乙丄天)彳天}$、

今有$戊=\frac{(甲丄天^{三})^{二}}{天^{三}}$、試求其微分、準十一十四款得$彳戊=\frac{(甲丄天^{三})^{四}}{二天(甲丄天^{三})彳天丅二天^{二}(甲丄天^{三})彳(甲丄天^{三})}$、即$彳戊=\frac{(甲丄天^{三})^{四}}{二天(甲丄天^{三})^{二}彳天丅二天^{二}(甲丄天^{三})三天^{二}彳天}$、

今有$戊=\frac{(甲丄天^{二})^{卯}}{一}$、試求其微分、準十一十四款得$彳戊=\frac{(甲丄天^{二})^{二卯}}{丅卯(甲丄天^{二})^{卯丅一}彳(甲丄天^{二})}$、即$彳戊=\frac{(甲丄天^{二})^{二卯}}{丅卯(甲丄天^{二})^{卯丅一}二天彳天}$、

今有等邊三角形其邊平變大一秒中每邊增半寸當邊爲八寸時、其中垂線之變比例若干、

答式 $\frac{四}{\sqrt{三}}$、蓋 $戊=\sqrt{\frac{四}{三天^{二}}}=\sqrt{甲天^{二}}$、準十三款得 $彳戊=\frac{二\sqrt{甲天^{二}}}{二甲天彳天}=\sqrt{甲}\,彳天$、其數即 $\frac{四}{\sqrt{三}}$ 也、

今有等邊三角形、其邊變大如前、邊爲八寸時、面之變比例若干、

答式 二$\sqrt{三}$、蓋 戊＝一天地、準九款得 彳戊＝地彳天丄天彳地 ＝$\sqrt{三}$丄$\sqrt{三}$＝二$\sqrt{三}$、

今有圜金版、得火變大、一秒中徑線增一百分寸之

一、當徑爲二寸時、其面之變比例若干

答式$\frac{一〇〇}{周}$、蓋$戊=\frac{四}{周}天^{二}$、準四款得

$彶=\frac{二}{周}天伕$

$=\frac{二}{周}\times\frac{一〇〇}{二}$

$=\frac{一〇〇}{周}$、

今有圜金板變大每秒中其面增五十分寸之一當面積爲一方寸時、徑之變比例若干、

答式$\frac{五〇\sqrt{周}}{二}$、蓋$戊=\sqrt{\frac{周}{四}天}=\sqrt{甲天}$、準十三款得

$彶=\frac{二\sqrt{甲天}}{甲伕}$

$=\frac{周}{四}\times\frac{五〇}{二}\div二\sqrt{\frac{周}{二}}$

$=\frac{五〇周}{四}\div\sqrt{\frac{周}{四}}$、

今有肥皂汁吹泡一秒中其徑增十分寸之一、當徑爲二寸時、其體積之變比例若干、

答式 $\frac{五}{周}$、葢 $戊=\frac{三}{三}\times\frac{四}{周}天=\frac{六}{周}天^{三}=甲天$

準四款得

$彳戊=三甲天^{二}彳天$

$=二周\times\frac{二}{一〇}=\frac{五}{周}$

今有肥皂泡一秒中其體積增二立寸、當徑為二寸時、徑之變比例若干、

答式 $\frac{周}{一〇}$、葢 $戊=\frac{六}{周}天^{三}$、

準四款得

$彳戊=三\frac{六}{周}天^{二}彳天$

$彳天=二\div三\frac{六}{周}天^{二}$

$=二\div二周=\frac{周}{一}$、

今有一童子在六十尺高臺上、一童子于平地遠赴之、每一時行五里、當離臺足八十尺時、兩童子漸近之比例若干、

答曰、一時四里、蓋 $戊=\sqrt{天^{二}丄地^{二}}$、準十三款得 $彸=\frac{二\sqrt{天^{二}丄地^{二}}}{二天伕}=\frac{二〇〇}{八〇〇}=四$、

今有金球變大、其徑每秒增十分寸之一、當體積之變比例一秒中五立寸時、其徑長若干、

答式 $\frac{\sqrt{周}}{一〇}$、蓋 $戊=\frac{六}{周}天^{三}$、準四款得 $天^{三}=\frac{周}{二}彸\div伕=\frac{周}{一〇}\div\frac{一〇}{一}=\frac{周}{一〇〇}$ $天=\frac{\sqrt{周}}{一〇}$、

今有圜錐變大、每秒中底徑增十分寸之一、其高一尺二寸、爲常數不變、當底徑爲十寸時、其體積之變比例若干、

答式二周寸、蓋$戊=\frac{四}{周}天^{二}\frac{三}{地}$、準四款得$彳戊=\frac{六}{周地}天彳天$ $=二周寸$、

今有圜金版變大、其徑每秒增十分寸之一、當面積之變比例一秒中一方寸之時、徑長若干、

答式$\frac{周}{二〇寸}$、蓋$戊=\frac{四}{周}天^{二}$、準四款得$彳戊=\frac{二}{周}天彳天$ $天=\frac{周}{二}彳戊\div彳天$ $=\frac{周}{二〇寸}$、

代微積拾級卷十一

米利堅羅密士譔
英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

微分二

疊微分

凡變數若干乘方函數之微分、中包變數之少一乘方、故可以其微係數爲次函數、更求微分、而得二次微係數、又以爲函數、求得三次微係數、餘仿此、

如 $戊=甲天^{三}$、則 $\frac{彳戊}{彳天}=三甲天^{二}$、$三甲天^{二}$ 中包天、又以爲函數而求微分則得

$彳\left(\frac{伕}{彳戊}\right)=六甲天伕$、設伕為常數、則得$彳\left(\frac{伕}{彳戊}\right)=\frac{伕}{彳(彳戊)}=\frac{伕}{彳^{二}戊}$、彳^{二}戊為戊二次微分之記號、所以$\frac{伕}{彳戊}=六甲天伕$、以伕約之、得$\frac{伕^{二}}{彳^{二}戊}=六甲天$、伕^{二}為伕之平方、非天^{二}之微分、六甲天為一次微係數之微係數、故名二次微係數、而六甲天中包天、又以為函數而求微分、得$\frac{伕^{二}}{彳^{二}戊}=六甲伕$、以伕約之、得$\frac{伕^{三}}{彳^{三}戊}=六甲$、六甲為二次微係數之微係數、故名三次微係數、乃天微分之立方約戊三次微分之同數、此六甲不包天、不能再求微

分、故$天^{三}甲=戊$可得三次微係數、凡函數求疊微分、俱準此、$彳^{二}戊$為戊微分之微分、$彳戊^{二}$為戊微分之平方、當明辨之、切勿混視也、

設題

今有$甲天^{四}$、試求其各次微係數、

答曰、一次$四甲天^{三}$、二次$一二甲天^{二}$、三次$二四甲天$、四次$二四甲$、

今有$(甲丄天)^{三}$、試求其各次微係數、

答曰、一次$三(甲丄天)^{二}$、二次$六(甲丄天)$、三次$一二天$、四次$一二$、

馬氏捷術

馬格老臨詳獨變數爲級數、如下款、

第一款　戊爲天之函數、詳之爲天之諸正方數、其式爲

$$戊=(戊)\perp\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)天\perp\left(\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}\right)\frac{天^{二}}{二}\perp\left(\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}\right)\frac{天^{三}}{二\times三}\perp\cdots\cdots、$$

若天爲〇、則諸括弧內數爲諸函數　任

以戊爲天之何函數、設等于$(甲\perp天)^{卯}$、詳之得天之諸乘方、與不包天之諸係數、諸係數以呷叱呐可等元

代之、得

戊＝呷丄吃天丄哂天^{二}丄叮天^{三}丄口戊天^{四}丄……、

求微分、以彳天約得

$\frac{彳天}{彳戊}$＝吃丄二哂天丄三叮天^{二}丄四口戊天^{三}丄……、

疊次求微分、以彳天約之、則呷吃哂叮等元遞消去、如下

$\frac{彳天^{二}}{彳戊}$＝二哂丄二✕三叮天丄三✕四口戊天^{二}丄……、

又

$\frac{彳天^{二}}{彳戊}$＝二✕三叮丄二✕三✕四口戊天丄……、

餘仿此、若天＝〇、則戊爲(戊)、$\frac{彳天}{彳戊}$爲($\frac{彳天}{彳戊}$)、$\frac{彳天^{二}}{彳戊}$爲($\frac{彳天^{二}}{彳戊}$)、餘類推、用上諸

式之同數、得 $(戊)=呷$ $\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)=吃$ $\left(\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}\right)=二呐$ $\left(\frac{彳天^{三}}{彳^{三}戊}\right)=二\times三叮$、即得呷吃呐叮諸係數之

同數 $呷=(戊)$ $吃=\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)$ $呐=\frac{二}{一}\left(\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}\right)$ $叮=\frac{二\times三}{一}\left(\frac{彳天^{三}}{彳^{三}戊}\right)$、用此諸同數于原式中、得 $戊=(戊)丄\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)天丄\left(\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}\right)\frac{二}{天^{二}}丄\left(\frac{彳天^{三}}{彳^{三}戊}\right)\frac{二\times三}{天^{三}}丄\cdots\cdots$、與款

合、

設題

今有 $(甲丄天)^{卯}$、試詳其級數、

答曰、令$天=〇$、則函數消為$甲^{卯}$故$(戊)=甲^{卯}$、疊求函數之微分、得$\frac{彳戊}{彳天}=卯(甲\perp天)^{卯丅一}$、若$天=〇$、則得$卯甲^{卯丅一}$、故$\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)=卯甲^{卯丅一}$、又$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=卯(卯丅一)(甲\perp天)^{卯丅二}$、若$天=〇$、則得$卯(卯丅一)甲^{卯丅二}$、又$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=卯(卯丅一)(卯丅二)(甲\perp天)^{卯丅三}$、若$天=〇$、則得$卯(卯丅一)(卯丅二)甲^{卯丅三}$、用此諸同數于馬氏式中得

$$(甲\perp天)^{卯}=甲^{卯}\perp卯甲^{卯丅一}天\perp\frac{卯(卯丅一)}{二}甲^{卯丅二}天^{二}\perp\cdots$$

即級數也、

今有$戊=\frac{甲丄天}{一}$、試詳其級數、

答曰、疊求函數之微分、得$\frac{彳天}{彳戊}=丅\frac{(甲丄天)^{二}}{一}$ $\frac{彳天^{二}}{彳戊}=\frac{(甲丄天)^{三}}{二}$ $\frac{彳天^{三}}{彳戊}=丅\frac{(甲丄天)^{四}}{二乂三}$、設$天=〇$、則得下諸式$\left(戊\right)=\frac{甲}{一}$ $\left(\frac{彳天}{彳戊}\right)=丅\frac{甲^{二}}{一}$ $\left(\frac{彳天^{二}}{彳戊}\right)=\frac{甲^{三}}{二}$ $\left(\frac{彳天^{三}}{彳戊}\right)=丅\frac{甲^{四}}{二乂三}$、用此諸同數于馬氏式中、得$\frac{甲丄天}{一}=\frac{甲}{一}丅\frac{甲^{二}}{天}丄\frac{甲^{三}}{天^{二}}丅\frac{甲^{四}}{天^{三}}丄\cdots$即級數也、

今有$\frac{二丅天}{一}$、試詳其級數、　答式$一丄天丄天^{二}丄天^{三}丄天^{四}丄\cdots$

今有$\sqrt{甲\perp天}$、試詳其級數、

答式

$甲^{\frac{二}{一}} \perp \frac{二}{一}甲^{\top\frac{二}{一}}天 \top \frac{二\times四}{一}甲^{\top\frac{二}{三}}天^{二} \perp \frac{二\times四\times六}{一\times三}甲^{\top\frac{二}{五}}天^{三} \top \cdots$、

今有$(甲\top天)^{\top二}$、試詳其級數、

答式

$甲^{\top二} \top 二甲^{\top三}天 \perp 三甲^{\top四}天^{二} \top 四甲^{\top五}天^{三} \perp \cdots$、

今有(甲丄天)^{丅三}、試詳其級數、答式

甲^{丅三}丅三甲^{丅四}天丄六甲^{丅五}天^{二}丅一〇甲^{丅六}天^{三}丄……、

設天＝〇、所得函數戊之微係數爲無窮數、則馬氏術不能詳、

如戊＝天對　戊＝天餘切　戊＝$\frac{天}{一}$等、天＝〇、則皆爲無窮數、又如戊＝甲天$^{\frac{三}{一}}$、第一次微係數之式爲$\frac{彳天}{彳戊}＝\frac{三天^{\frac{三}{二}}}{甲}$、若天＝〇、則亦爲無窮數、以上諸式、馬

氏術皆不能詳、

戴氏新術

戴勞詳兩變數和較之函數爲級數、如下兩款、

第二款　凡天地兩變數和較之函數、或天變而地不變、或地變而天不變、其微係數同、

如$\text{戊}=(\text{天}\perp\text{地})^{\text{卯}}$、若天變而地不變、則得$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}=\text{卯}(\text{天}\perp\text{地})^{\text{卯}\top\text{一}}$、若地變而天不變、則得$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳地}}=\text{卯}(\text{天}\perp\text{地})^{\text{卯}\top\text{一}}$、兩微係數同也、

第三款　凡兩變數和之函數、詳之爲級數、其式爲

$$\text{函}(\text{天}\perp\text{地})=\text{戊}\perp\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}\text{地}\perp\frac{\text{彳}^{二}\text{戊}}{\text{彳天}^{二}}\times\frac{\text{地}^{二}}{一\times二}\perp\frac{\text{彳}^{三}\text{戊}}{\text{彳天}^{三}}\times\frac{\text{地}^{三}}{一\times二\times三}\perp\cdots$$

、若$\text{地}=〇$、則戊爲函數之同數、

試以戊爲$\text{天}\perp\text{地}$之函數、詳地之諸乘方、得

$$\text{戊}=\text{函}(\text{天}\perp\text{地})=\text{甲}\perp\text{乙地}\perp\text{丙地}^{二}\perp\text{丁地}^{三}\perp\cdots$$

（一）、式中

呷𠮙㖦叮諸係數、非地所生之數、乃天與原函數中諸常數所生之數、乃求呷𠮙㖦叮諸元之同數、令天與地任與何數同、俱與級數合、設以天爲變地爲不變、求微分得

$$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\frac{\text{彳天}}{\text{彳呷}}+\frac{\text{彳天}}{\text{彳𠮙}}\text{地}+\frac{\text{彳天}}{\text{彳㖦}}\text{地}^{2}+\frac{\text{彳天}}{\text{彳叮}}\text{地}^{3}+\cdots$$、

設以地爲變天爲不變、求微分得

$$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}=\text{𠮙}+\text{二㖦地}+\text{三叮地}^{2}+\cdots$$、

準前

$$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\frac{\text{彳地}}{\text{彳戊}}$$、

本卷二款

故

$$\frac{\text{彳天}}{\text{彳呷}}+\frac{\text{彳天}}{\text{彳𠮙}}\text{地}+\frac{\text{彳天}}{\text{彳㖦}}\text{地}^{2}+\cdots=\text{𠮙}+\text{二㖦地}+\text{三叮地}^{2}+\cdots$$、

諸級數之係數、非

因地而生、故地任與何數同、諸係數不變、而式中兩邊地之諸乘方相同、正負亦同、故有諸式如下、

$\frac{彳天}{彳甲}=吃$ ㊁ $\frac{彳天}{彳乙}=二呐$ ㊂ $\frac{彳天}{彳丙}=三叮$ ㊃、餘仿此、若$地=〇$、則第㊀式中$天丄地$之函數、變爲天之函數、以戊代之、則得$呷=戊$以此右數代第㊁式中之呷、得$吃=\frac{彳天}{彳戊}$、以此右數代第㊂式中之吃、得$二呐=\frac{彳天^{二}}{彳戊}$、即$呐=\frac{二彳天^{二}}{彳戊}$、以此右數代第㊃式中之呐、得$三叮=\frac{二彳天^{三}}{彳戊}$、故$叮=\frac{一乂二彳天^{三}}{彳戊}$、以此諸同數、代第㊀式中呷吃呐叮諸元、則得式、

$$庚' = 函(天丄地) = 庚丄\frac{彳庚}{彳天}地丄\frac{彳^{二}庚}{彳天^{二}}\times\frac{地^{二}}{一\times二}丄\frac{彳^{三}庚}{彳天^{三}}\times\frac{地^{三}}{一\times二\times三}丄\cdots$$

與款合、

系、若函(天丅地)、求其詳數理同、其式為

$$庚' = 函(天丅地) = 庚丅\frac{彳庚}{彳天}地丄\frac{彳^{二}庚}{彳天^{二}}\times\frac{地^{二}}{一\times二}丅\frac{彳^{三}庚}{彳天^{三}}\times\frac{地^{三}}{一\times二\times三}丄\cdots$$、

設題

今有$戊=(天\perp地)^{卯}$試詳其級數、

答曰、設$地=〇$、則得$戊=天^{卯}$、疊求微分、得$\frac{彳天}{彳戊}=卯天^{卯\top一}$、$\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}=卯(卯\top一)天^{卯\top二}$、$\frac{彳天^{三}}{彳^{三}戊}=卯(卯\top一)(卯\top二)天^{卯\top三}$、餘類推、用此諸同數于戴氏式中、得$戊=天^{卯}\perp卯天^{卯\top一}地\perp\frac{一\times二}{卯(卯\top一)}天^{卯\top二}地^{二}\perp\frac{一\times二\times三}{卯(卯\top一)(卯\top二)}天^{卯\top三}地^{三}\perp\cdots$、卽級數也、

今有$戊=\sqrt{天+地}$、試詳其級數、

答式

$$戊=天^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}天^{-\frac{1}{2}}地-\frac{1}{2\times4}天^{-\frac{3}{2}}地^{2}+\frac{1\times3}{2\times4\times6}天^{-\frac{5}{2}}地^{3}-$$

今有函數$戊=\sqrt[3]{天+地}$、試詳其級數、

答式

$$戊=天^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}天^{-\frac{2}{3}}地-\frac{2}{3\times6}天^{-\frac{5}{3}}地^{2}+\frac{2\times5}{3\times6\times9}天^{-\frac{8}{3}}地^{3}-\cdots$$

今有$戊=(天丄地)^{卯}$試詳其級數、

答曰、設$地=〇$、則得$戊=天^{卯}$、疊求微分、得

$$\frac{彳天}{彳戊}=卯天^{卯丅一}$$

$$\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}=卯(卯丅一)天^{卯丅二}$$

$$\frac{彳天^{三}}{彳^{三}戊}=卯(卯丅一)(卯丅二)天^{卯丅三}$$

、餘類推、用此諸同數于戴氏式中、得

$$戊=天^{卯}丄卯天^{卯丅一}地丄\frac{一\times二}{卯(卯丅一)}天^{卯丅二}地^{二}丄\frac{一\times二\times三}{卯(卯丅一)(卯丅二)}天^{卯丅三}地^{三}丄\cdots$$

、即級數也、

今有 $戊=\sqrt{天\perp地}$、試詳其級數、

答式

$$戊=天^{\frac{二}{一}}\perp\frac{二}{一}天^{丅\frac{二}{一}}地丅\frac{二\times四}{一}天^{丅\frac{二}{三}}地^{二}\perp\frac{二\times四\times六}{一\times三}天^{丅\frac{二}{五}}地^{三}丅$$

今有函數 $戊=\sqrt[三]{天\perp地}$、試詳其級數、

答式

$$戊=天^{\frac{三}{一}}\perp\frac{三}{一}天^{丅\frac{三}{二}}地丅\frac{三\times六}{一\times二}天^{丅\frac{三}{五}}地^{二}\perp\frac{三\times六\times九}{一\times二\times五}天^{丅\frac{三}{八}}地^{三}丅\cdots$$

$天 \perp 地$

諸函數之級數、依戴氏術雖大率可詳、然或係數爲無窮、則戴氏術亦不能推也、

如 $戊 = 甲 \perp (乙 \top 天 \perp 地)^{\frac{三}{二}}$、則 $戊 = 甲 \perp (乙 \top 天)^{\frac{三}{二}}$ $\frac{彳天}{彳戊} = \top \frac{二(乙 \top 天)^{\frac{三}{一}}}{一}$ $\frac{彳天^{二}}{彳彳戊} = \top \frac{四(乙 \top 天)^{\frac{三}{三}}}{一}$、餘類推、此式若 $天 = 乙$、則諸微係數爲無窮、又如 $戊 = 甲 \perp (乙 \top 天 \perp 地)^{\frac{卯}{一}}$、此式若卯爲整數、而 $天 = 乙$、則諸微係數爲無窮、凡此類皆非戴氏術所能詳、 按 $天 = 乙$、則 $戊 = 甲 \perp 地^{\frac{卯}{一}}$、

$戊 = 甲$、戊與戊之同數不能同率、大凡因變數之同數

異、而函數變其率、則戴氏術不能詳、

諸自變數之函數

設戌為天地兩自變數之函數、夫曰自變、則此元非因彼元而變、彼元亦非因此元而變、故當詳辨二微係、此因天變、彼因地變、因天變者、視地一若常數、因地變者、視天一若常數、視地一若常數、則其微係數為$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$、視天一若常數、則其微係數為$\frac{\text{彳地}}{\text{彳戌}}$、此二微係數名曰偏微係、一為天之偏微係、一為地之偏微係、以

$\frac{彳天}{彳戊}\frac{彳地}{彳戊}$ 彳天 彳地 上為天之偏微分、下為地之偏微分、兩偏微分之和、為函數之全微分、如下式

$彳戊=\frac{彳天}{彳戊}彳天\perp\frac{彳地}{彳戊}彳地$、

設有天地人三變數之函數、則有三偏微分、其和為函數之全微分、如式

$彳戊=\frac{彳天}{彳戊}彳天\perp\frac{彳地}{彳戊}彳地\perp\frac{彳人}{彳戊}彳人$、

依各變數求函數之微分、視餘變數一若常數、如此盡求得諸變數之微分、并之、卽函數之全微分

設題

今有句股形、每秒中句變大一寸、股變大二寸、當句八寸股十二寸時、面積之變比例若干、

答曰、十四寸、蓋

戊$=\frac{一}{二}$天地、

彳戊$=\frac{一}{二}$地彳天$+\frac{一}{二}$天彳地

$=$一四、

今有句股形、每秒中句變大二寸、股變小三寸、當句十寸股八寸時、面積之變比例若何、

答曰、變小七寸、蓋

戊$=\frac{一}{二}$天地

彳戊$=\frac{一}{二}$地彳天$+\frac{一}{二}$天彳地

$=$八$-$一五$=-$七、

今有橢圜面每秒中長徑變大二寸短徑變大三寸當長徑二十寸短徑十二寸時面積變比例若干、

答曰、二一周、

蓋

戊＝天地周$\frac{四}{一}$、

彳戊＝$\frac{四}{一}$地周彳天丄$\frac{四}{一}$天周彳地

＝六周丄一五周＝二一周、

今有圜錐體、每秒中其高變小三寸、底徑變大一寸、當高十八寸底徑十寸時、體積之變比例若何、

答曰、變大五周、

蓋

戊＝$\frac{一二}{周}$天^{二}地、

彳戊＝$\frac{六}{周}$天地彳天丄$\frac{一二}{周}$天^{二}彳地

＝三〇周丅二五周＝五周、

代微積拾級卷十二

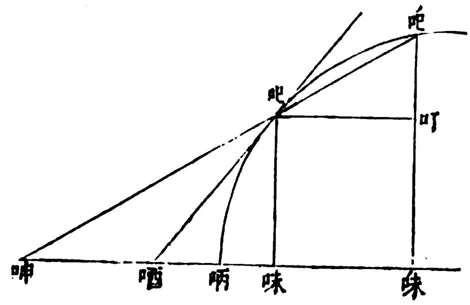
米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯
海甯　李善蘭　筆述

微分三

第一次微係數解

第一款　曲線內無論何點、其切線與橫軸交角之正切、等于縱線之第一次微係數、

如圖、呷吧咆爲曲線、于內任取吧點、命其縱橫線爲天地、命味味爲辛、以加橫線呷味、得



呐咊、命爲天、命其縱線𠯆咊爲地、作𠯆吧呻線、得$\frac{𠯆咊丅}{地丅}$＝吧叮𠯆叮＝吧味地、吧叮𠯆爲句股形、故有比例吧叮：𠯆叮：：一：呻切、卽得呻切＝$\frac{吧叮}{𠯆叮}$、以吧叮與𠯆叮之二同數代之、得$\frac{辛}{地丅地}$＝呻切、此式顯天地二長數之比例、若以地爲天之函數而求微係數、必令辛＝〇、以求比例之限、辛漸小、則𠯆點漸近吧點、而呻吧𠯆線漸近哂吧切線、辛同于〇、則𠯆合于吧、

而呻吧吧線合于哂吧、即得$酉切=\frac{彳天}{彳地}$、與款合、

設欲取曲線內一點、令切線交橫軸、成若干度角、但令縱線之第一次微係數、等于所設角度之正切、即得、如命正切為甲、則得$甲=\frac{彳天}{彳地}$、無論何曲線、但取本曲線式、準此式推之、即得所求點之天地二同數、

設題

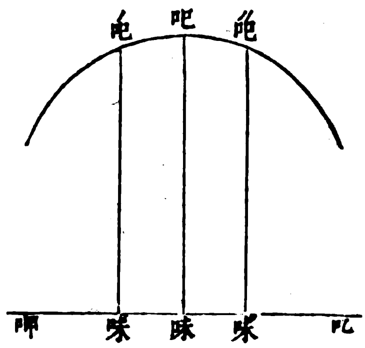
今有拋物線、欲取線內一點、令其切線與曲線徑之交角為四十五度、其法若何、

答曰、拋物線之式爲$地^{二}=二巳天$、求微分、得$二地\text{彳地}=二巳\text{彳天}$、地之微係數爲$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{地}{巳}$、四十五度之正切即半徑、故得$\frac{地}{巳}=一$、即$地=巳$、而原式爲$地^{二}=二巳天$、則$天=\frac{二}{巳}$、故所求點之縱線、必過曲線心、

論函數極大極小

獨變數之函數、有極大時極小時、設變數漸大過限而復漸小、則恰當限之時、爲極大、

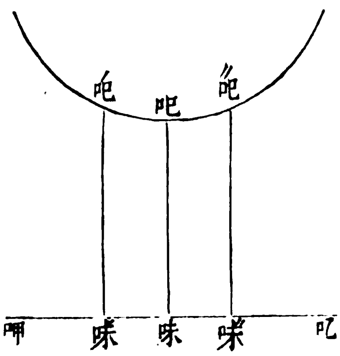
如圖、吧咊直線、依呷叱方向漸移、恆與呷叱成直



角、其線漸大、過吧味而復漸小、正當吧味時為極大、

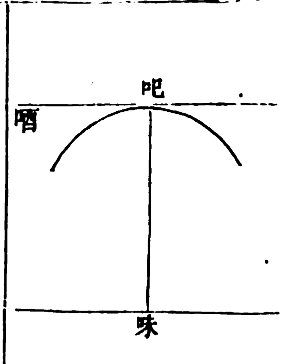
設變數漸小、過限而復漸大、則恰當限之時為極小、

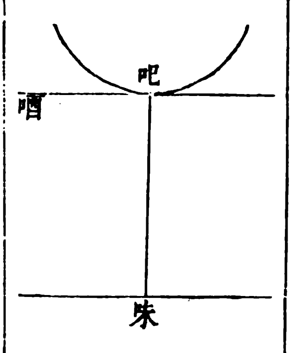
如圖、吧味漸移自甲向乙、恒與呷吃成直角、其線漸小、過吧味而復漸大、正當吧味時、為極小、



設戊爲天之函數、而天變小、其變之微、至不可譬喻、命函數爲戊、又天變大、其變之微、至不可譬喻、命函數爲戊、若戊大于戊或戊、則戊爲極大、小于戊或戊、則戊爲極小、故函數極大、必大于變數略前略後之函數、極小、必小于略前略後之函數也、

準前命曲線之縱線爲地、橫線爲天、則切線與橫軸交角之正切等于$\frac{彳天}{彳地}$、（本卷一款）若吧味爲極大、則哂吧切線與橫軸平行、而不能成角、所以得$\frac{彳天}{彳地}=〇$、若吧味爲極小、則哂吧切線亦與橫軸平行、而不能成





角、故亦得$\frac{\text{伕}}{\text{彵}}$＝〇、故凡得$\frac{\text{伕}}{\text{彵}}$＝〇、乃顯吧點之切線與橫軸平行、吧不為曲線之極大點、必為極小點、

欲攷函數有極大極小否、當求第一次微係數、而令$\frac{\text{伕}}{\text{彵}}$等于〇、以求得天之同數為甲、乃以甲丄辛及甲丅辛遞代原式中之天、而視其所得、若二數俱小于甲

則函數有極小、

設題

今有 戊＝一　一〇天丅天^{二}、求函數戊有極大否、

答曰、求第一次微係數、得 $\frac{彳天}{彳戊}$＝一〇丅二天、令此式等于〇、則得

一〇丅二天＝〇、故 天＝五、五卽甲也、乃以五及 五丅一 五丄一 遞代原式中之

天、得如下、

四代天 戊＝四〇丅一六＝二四

五代天 戊＝五〇丅二五＝二五

六代天 戊＝六〇丅三六＝二四、

五丅一

五丄一

代天所得二數、俱小于五代天所得數、故天等于五時、戊爲極大、

今有 $戊＝天^{二}丅一六天丄七〇$、求函數戊有極小否、

答曰、求第一次微係數、得 $\frac{彳天}{彳戊}＝二天丅一六$、令等于〇、則得 二天丅一六＝〇、故 天＝八、八即甲也、以八及

八丄一

八丅一

遞代原式中之天、得數

如下

戊′=四九丅一一二丄七〇═七 七代天

戊=六四丅一二八丄七〇═六 八代天

戊″=八一丅一四四丄七〇═七 九代天

八丅一

八丄一

代天所得二數、俱大于八代天所得數、故天等于八時、戊爲極小、

用戴氏術、得攷定函數極大極小之公法、

試置戊═函(天)、以辛增損天、得

戊═函(天丅辛)

戊′═函(天丄辛)、

依戴氏術、得

戊″丅戊═$\frac{伕}{𢓊}$辛丄$\frac{伕^{二}}{𢓊^{二}}$×$\frac{一×二}{辛^{二}}$丄$\frac{伕^{三}}{𢓊^{三}}$×$\frac{一×二×三}{辛^{三}}$丄……

戊′丅戊═丅$\frac{伕}{𢓊}$辛丄$\frac{伕^{二}}{𢓊^{二}}$×$\frac{一×二}{辛^{二}}$丅$\frac{伕^{三}}{𢓊^{三}}$×$\frac{一×二×三}{辛^{三}}$丄……、

此

式中若戌爲極大、必大于戌及戌、卽辛爲無窮小

而同數爲負、若戌爲極小、必小于戌及戌、卽辛爲

無窮小、而同數爲正、辛必爲無窮小者、葢級數和

之正負、必視首項、而此二式之首項正負不同、故

首項非等于○、函數戌無極大極小、必首項爲○、

卽$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戌}}$=○、乃可得天之同數、而知戌或爲極大、或爲極

小也、第一次微係數爲○、則級數和之正負視

第二次微係數、若第二次微係數爲負、則函數極

大、若正、則函數極小、設第二次微係數亦爲○、

而第三次微係數不爲○、則二級數之正負不同、函數無極大極小、設第三次微係數亦爲○、則級數和之正負視第四次微係數、負則函數極大、正則函數極小、餘仿此、

求天之諸同數以攷函數極大極小之數、法先求函數之第一次微係數、令等于○、而求得天之諸同數、以諸同數迭代第二次微係數中之天、若得負、則函數爲極大、若得正、則函數爲極小、若所得同數、或令第二次微係數等于○、則代第

三次微係數中之天、若仍等于〇、則代第四次微係數中之天、如此遞代、至遇不等于〇而止、所遇之次數若爲奇、則函數非極大極小、若爲偶、則所得負者、函數極大、正者、函數極小、

設題

今有 $\text{戊}=\text{天}^{\text{三}}\text{丅三天}^{\text{二}}\text{丅二四天丄八五}$、求天之同數、攷函數極大極小、

答曰、求微係數得 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\text{三天}^{\text{二}}\text{丅六天丅二四}$。令等于〇、得 $\text{三天}^{\text{二}}\text{丅六天丅二四}=\text{〇}$。卽 $\text{天}^{\text{二}}\text{丅二天丅八}=\text{〇}$。天之二

同數、一爲丄四、一爲丅二、第二次微係數如下$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$＝六天丅六、此式中以四代天、得丄一八爲正、則函數爲極小、以丅二代天、得丅一八爲負、則函數爲極大、故天＝丅二函數爲極大、天＝四函數數爲極小、

以天之諸同數迭用于本式中、以攷戊之諸同數、題理自顯、列表如左、

戊＝六九
戊＝一〇三
戊＝一一三　極大
戊＝一〇五
戊＝八五
戊＝五九
戊＝三三
戊＝一三
戊＝五　極小
戊＝一五
戊＝四九

天=丅四

天=丅三

天=丅二

天=丅一

天=〇

天=丄一

天=丄二

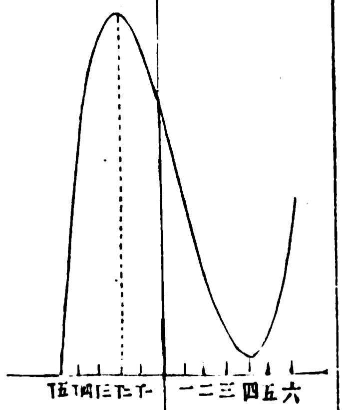
天=丄三

天=丄四

天=丄五

天=丄六

觀表、天變大、自丅四至丅二、函數亦變大、自丅二至丄四、函數反變小、自丄四後、函數又變大、從此至天等于無窮、不復變小也、



如圖、諸橫線爲天之諸同數、依戌之諸同數作諸縱線、而聯諸縱線之端、即成所設之曲線、其橫線爲丅二、縱線最大、橫線爲四、縱線爲最小也、

今有戊＝天^{三}丅一八天^{二}丄九六天丅二〇、求天之同數、攷戊極大極小、

答曰、天＝四、戊為極大、天＝八、戊為極小、

今有戊＝天^{三}丅一八天^{二}丄一〇五天、求天之同數、攷戊極大極小、

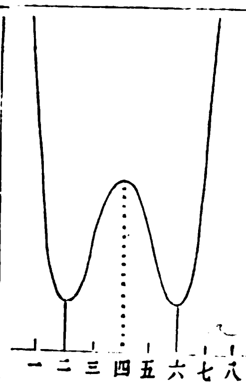
答曰、天＝五、戊為極大、天＝七、戊為極小、

今有戊=天^{四}丅一六天^{三}丄八八天^{二}丅一九二天丄一五〇求天之同數、改戊極大極小、

答曰、天=四、戊為極大、天=二、天=六、戊為極小、

以此題天之諸同數、求所當戊之諸同數、列表于左、

天=一	戊=三一	
天=二	戊=六	極小
天=三	戊=一五	
天=四	戊=二二	極大
天=五	戊=一五	
天=六	戊=六	極小
天=七	戊=三一	
天=八	戊=一五〇	



如圖諸縱線有二極小、爲橫線二與六所當者、有一極大、爲橫線四所當者、

今有

$戊=天^{五}丅二五天^{四}丄\frac{七〇〇}{三}天^{三}丅一〇〇〇天^{二}丄一九二〇天丅一一〇〇$

求天之同數、攷戊極大極小、

答曰、天＝二、天＝六、戊爲極大、天＝四、天＝八、戊爲極小、

求函數極大極小捷法、

先設二例　一、天之諸同數、能令函數爲極大極小、則亦能令常數乘約函數所得數爲極大極小、故凡求極大極小、常數可去之不用、　二、天之諸同數、能令函數爲極大極小、則亦能令函數之諸乘方積爲極大極小、故凡求極大極小、開方根指數諸號、可去之不用、

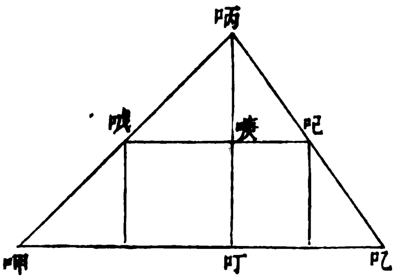
凡推函數極大極小、先詳函數之同數、次求第一次

微係數而令同于○、以求變數天之諸同數、即得函

數極大極小、

設題

今有三角形、求所容最大矩形、



如呷吃呥三角形、命其底呷吃爲乙、其

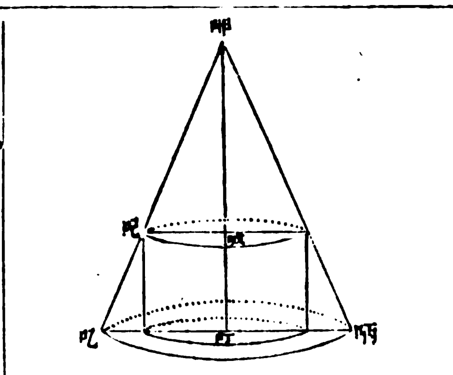
高呥叮爲辛、所容矩形之高咦叮爲天、

準相似三角形術、有比例 $\frac{呥}{叮}:\frac{呥}{咦}::\frac{呷}{吃}:\frac{呧}{吧}$、即 $辛:辛丅天::乙:\frac{呧}{吧}$、故 $\frac{呧}{吧}=\frac{辛}{乙}(辛丅天)$、

矩形之面積爲呧吧乘咦叮、故等于 $\frac{辛}{乙}(辛丅天)天$、惟 $\frac{辛}{乙}$ 爲常

數、是以 $\frac{辛^{二}}{乙}(辛天丁天^{二})$ 爲極大、則 $辛天丁天^{二}$、亦爲極大、卽得式 $\frac{彳天}{彳戊}=辛丁二天=〇$、則 $天=\frac{三}{辛}$、故得矩形之高、半三角形之高、其積爲極大、

今有圜錐體、求所容最大圜柱積、



如吃呷㕲圜錐體、命其高呷叮爲甲、底半徑吃叮爲乙、所容圜柱之高吠叮爲天、準相似三角形術、有比例 呷叮:吃叮::呷吠:吒吠、卽 甲:乙::甲丁天:吒吠 故 吠吒 $=\frac{甲}{乙}(甲丁天)$、凡圜半徑爲味、圜積爲周味^{二}、故以吠吒爲圜半徑、

其圜積必爲$\frac{甲^{二}}{周乙^{二}}(甲丅天)^{二}$、以柱高哎叮乘之、得$\frac{甲^{二}}{周乙^{二}}天(甲丅天)^{二}$、卽圜柱積、

此式若爲極大、則去其常數$\frac{甲^{二}}{周乙^{二}}$、得$天(甲丅天)^{二}$、亦爲極大、求

微係數、得$\frac{彳天}{彳戊}=甲^{二}丅四甲天丄三天^{二}=〇$、此式天或等于甲、或等于$\frac{三}{甲}$、乃求第

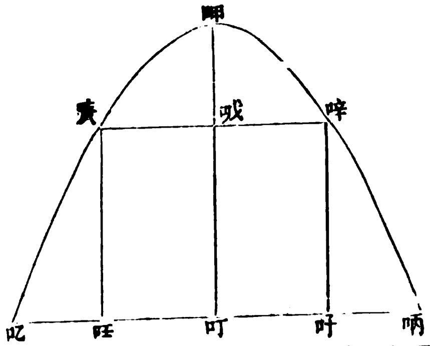
二次微係數、得$\frac{彳天^{二}}{彳^{二}戊}=丅四甲丄六天$、此式若天等于甲、則爲正、而得

極小、若天等于$\frac{三}{甲}$則爲負、而得極大、故所容極大

圜柱之高、爲錐高三分之一、

今有拋物線面、求所容最大矩形之高、

如吃咦呷啐哂叮爲拋物線面、命其高呷叮爲甲、與矩形高之較呷戒爲天、準拋物線式 $地^{二}=二巳天$、五卷一款 卽 $咦戒^{二}=二巳天$、故 $咦戒=\sqrt{二巳天}$、而 $咦啐=二\sqrt{二巳天}$、所以咦啐呼旺面積爲 $二\sqrt{二巳天}(甲丅天)$、若此爲極大、則 $\sqrt{天}(甲丅天)$ 亦爲極大、



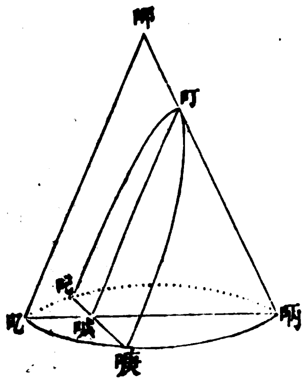
故 $戊=甲天^{二}丅天^{三}$、求微係數、得下式 $\frac{伏}{彼}=二甲天丅三天^{二}=〇$、故 $\frac{天^{二}}{甲}=三天^{二}$、卽 $甲=\frac{三}{二}天$、而 $天=\frac{二}{三}甲$、所以最

大矩形之高、爲拋物面中徑三分之二、

今有拋物線面、其橫線九倍縱線十六、求所容最大矩形之高廣各若干、

答曰、高六、廣九又一千分之二百三十六、

今有圜錐體、求其最大拋物線之中徑、



如𠮙呷丙爲圜錐體、命其底徑𠮙丙爲甲、斜距呷𠮙爲乙、底徑截分丙戊爲天、則 $\text{𠮙戊}=\text{甲}-\text{天}$、而 $\text{戊己}=\sqrt{\text{甲天}-\text{天}^{2}}$ $\text{己庚}=2\sqrt{\text{甲天}-\text{天}^{2}}$、準相似三角形理、

有比例 $甲:乙::天:\frac{叮}{吺}$、則 $\frac{叮}{吺}=\frac{甲}{乙天}$、故拋物線面積為 $\frac{二}{三}\times\frac{甲}{乙天}二\sqrt{甲天丅天^{二}}$、若此為極大、則 $天\sqrt{甲天丅天^{二}}$ 亦為極大、自乘以去開方根、得 $天^{二}(甲天丅天^{二})$、即 $甲天^{三}丅天^{四}$、仍為極大、求微係數、得 $\frac{彳天}{彳戊}=三甲天^{二}丅四天^{三}$ $=〇$、故 $天=\frac{四}{三甲}$、而 $\frac{叮}{吺}=\frac{甲}{乙天}=\frac{四}{三}乙$、故最大拋物線之中徑、為圜錐體斜距四分之三、

按拋物面積、為縱橫線矩積三分之二、故 $二\sqrt{甲天丅天^{二}}$ 為縱線、$\frac{甲}{乙天}$ 為橫線、

今有甲線、欲分爲二分、令小分乘大分平方積、得數爲極大、其二分各若干、

答曰、小分$\frac{\text{甲}}{\text{三}}$、大分$\frac{\text{二甲}}{\text{三}}$、

今有甲線、欲分爲二分、令小分乘大分立方積、得數爲極大、其二分各若干、

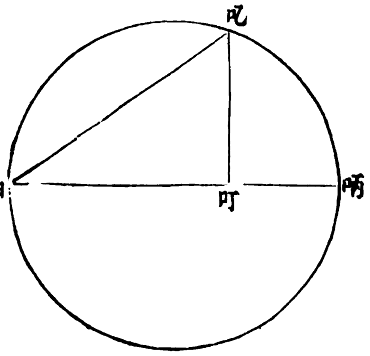
答曰、以天爲大分、則得式$\text{天}^{\text{二}}(\text{甲}-\text{天})$、如法求得$\text{天}=\frac{\text{三甲}}{\text{四}}$、爲極大、

今有酒若干升、欲盛以圓柱形器、令器之內曲面底面和最小、高與底徑之比例當若何、

答曰、命酒爲丙、底之半徑爲天、則底爲$\text{周}\,\text{天}^{\text{二}}$、器之高

爲$\frac{周天^二}{丙}$、圜柱之內曲面積爲$\frac{周天^二}{丙}乂二周天=\frac{天}{二丙}$、加底面積、得$\frac{天}{二丙}\perp周天^二$、如法求得$天=\sqrt[三]{\frac{周}{丙}}$、以此同數代高式中之天、得$\sqrt[三]{\frac{周}{丙}}$、故極小面之高與底半徑相等、

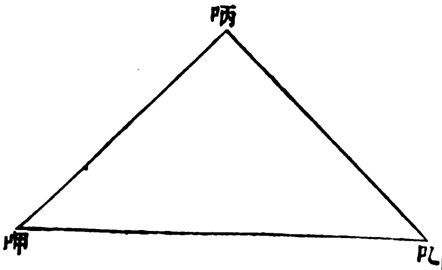
今有立圜體、于內作圜錐、欲令曲面最大、其高與球徑之比例若何、



如呷吃呥爲立圜體、命球徑呷呥爲$二甲$、命圜錐高呷叮爲天、則有比例$天:吃叮::吃叮:二甲丅天$、

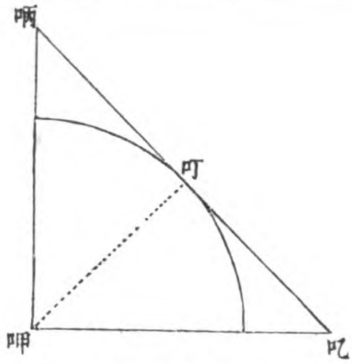
故$\frac{\text{叱}}{\text{叮}}=\sqrt{\text{二甲天丅天}^{\text{二}}}$又$\text{天}\therefore\frac{\text{呷}}{\text{叱}}::\frac{\text{呷}}{\text{叱}}\therefore\text{二甲}$故$\frac{\text{呷}}{\text{叱}}=\sqrt{\text{二甲天}}$、圜錐曲面爲$\text{周}\sqrt{\text{二甲天丅天}^{\text{二}}}\sqrt{\text{二甲天}}=\text{周}\sqrt{\text{四甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{丅二甲天}^{\text{三}}}$若爲極大、如法求得$\text{天}=\frac{\text{三}}{\text{四甲}}$、故曲面最大之圜錐、其高爲球半徑三分之四、

今有直線、欲爲弦求作最大句股形、其比例若何、



如呷叱呐句股形、命弦呷叱爲甲、句呐叱爲天、則股必爲$\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\text{丅天}^{\text{二}}}$、其面積必爲$\frac{\text{二}}{\text{天}}\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\text{丅天}^{\text{二}}}$如法求得$\text{二天}^{\text{二}}=\text{甲}^{\text{二}}$、故句股積最大、句與股相等、

今有象限形、欲引長其二半徑與切線成句股形、求其最小面積句股之比例若何、



如呷吃哂為所求句股形、作對角垂線呷叮、則面積為$\frac{二}{一}$呷叮×吃哂、若吃哂為極小、則面積亦為極小、因呷叮為常數故也、乃命呷叮為味、吃叮為天、則有比例吃叮∶呷叮∷呷叮∶哂叮、故$\text{叮哂}=\frac{\text{吃叮}}{\text{呷叮}^{二}}=\frac{天}{味^{二}}$、而$\text{吃哂}=天 \perp \frac{天}{味^{二}}$、如法求得天＝味、叮哂＝味、故句股相等、面積最小、

今有句股積求其最小句股和比例若何

答曰句股相等、

今有正方形、求所容最小正方形、位置若何、

答曰內正方各角、切外正方各邊之中點、

今有平圜、求所容最大矩形、其每邊若干、

答曰每邊皆等于味$\sqrt{二}$、

今有立圜、求所容最大圜錐、其高之比例若何、

答曰高爲立圜半徑三分之四、

今有米其積一立尺、欲盛以圜柱器、令器之內底蓋

曲面和積最小、其底半徑與高之比例若何、

答曰、底半徑爲$\sqrt[3]{\frac{一}{二周}}$、高爲$\sqrt[3]{\frac{四}{周}}$、

今有圜木、下徑三尺、上徑尺半、長二十尺、欲作圜柱、

令其積最大、其長與圜徑各若干、

答曰、長十三尺又三分尺之一、圜徑二尺、即下徑

三分之二也、

今有紅木板、下廣四尺、上廣二尺、長十尺、欲作桌面、

令其面積最大、其長廣各若干、

答曰、長十尺、廣二尺、即下廣之半也、

代微積拾級卷十三

米利堅羅密士譔
英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

微分四

越函數

凡變數與函數相聯屬之理、可用代數常法顯之者、謂之代數函數、如前數卷諸款是也、若變數與函數相聯屬之理、非代數常法所能顯者、謂之越函數、如

戊＝天弦　戊＝天切　戊＝天割　等式、為圜函數、戊＝天對　戊＝甲^{天}　等式、為對函數、指函數、

是也、

指函數微分

第一款 元不變、指數變、其函數之微分、等于積數乘元之訥氏對數、再以指數之微分乘之、

如指函數$戊=甲^{天}$、以天之長數為辛、得$戊'=甲^{天+辛}=甲^{天}甲^{辛}$、故$戊'-戊=甲^{天}甲^{辛}-甲^{天}=甲^{天}(甲^{辛}-一)$、乃用二項法詳$甲^{辛}$試以$甲=一+乙$、則$甲^{辛}=(一+乙)^{辛}$

$$=一+辛\frac{乙}{一}+辛(辛-一)\frac{乙^{二}}{一\cdot二}+辛(辛-一)(辛-二)\frac{乙^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$$

、此式之同數、為乙之諸

乘方級數、亦爲辛之諸乘方級數、故可變如下

$$甲^{辛}=(一⊥乙)^{辛}=一⊥\left(\frac{一}{乙}丅\frac{二}{乙^{二}}⊥\frac{三}{乙^{三}}丅\cdots\right)辛⊥\cdots$$

以下皆爲辛諸乘方之項以子代

$$\frac{一}{乙}丅\frac{二}{乙^{二}}⊥\frac{三}{乙^{三}}丅\cdots\cdots$$

則得

$$甲^{辛}丅一=子辛⊥\cdots$$

以下爲辛^{二}辛^{三}辛^{四}諸項用此同數于原式中、得

$$戊'丅戊=甲^{天}子辛⊥\cdots\cdots$$

以下皆爲辛諸乘方之項以辛約之、得

$$\frac{辛}{戊'丅戊}=甲^{天}子⊥\cdots\cdots$$

以下

皆爲辛

之諸項此式顯函數長數與變數數長數之比例、若長數同于〇、則得比例之限、卽微係數、其式爲$\frac{彳天}{彳彼}=\frac{彳天}{彳甲^{天}}=甲^{天}子$、子爲甲之因常數、可用馬氏術推其同數、惟$\frac{彳天}{彳甲^{天}}=甲^{天}子$、故$彳\left(\frac{彳天}{彳甲^{天}}\right)=彳甲^{天}子=甲^{天}子^{二}彳天$卽$\frac{彳^{二}天}{彳甲^{天}}=甲^{天}子^{二}$、而$\frac{彳^{三}天}{彳甲^{天}}=甲^{天}子^{三}$、餘類推、函數及遞次微係數中、皆令天同于〇、則得$(戊)=一$、$\left(\frac{彳天}{彳彼}\right)=子$、$\left(\frac{彳^{二}天}{彳彼^{二}}\right)=子^{二}$、$\left(\frac{彳^{三}天}{彳彼^{三}}\right)=子^{三}$、餘類推、故依馬氏術得

下式

$$甲^{天}=一\perp\frac{一}{子天}\perp\frac{一\times二}{子^{二}天^{二}}\perp\frac{一\times二\times三}{子^{三}天^{三}}\perp\cdots$$

若令 $天=\frac{子}{一}$、則得

$$甲^{\frac{子}{一}}=一\perp\frac{一}{一}\perp\frac{一\times二}{一}\perp\frac{一\times二\times三}{一}\perp\cdots$$

此級數之和爲 二．七一八二八一七二、卽訥白爾對數之底也、以訥字代之、得 $甲^{\frac{子}{一}}=訥$ $甲=訥^{子}$、所以常數子爲甲元訥氏之對數、以 對甲 別之、得 $\frac{仸}{彳甲^{天}}=甲^{天}甲對$ 故 $彳甲^{天}=甲^{天}甲對仸$、與款合、

對函數微分

第二款　凡數之對數微分、等於本數之微分乘對

數之根、以本數約之、

準上欵 $彳甲^{天}＝甲^{天}甲對彳天$、設 $戊＝甲^{天}$、則得 $彳天＝\frac{戊甲對}{彳戊}$、設甲為某對數之底、則天

必為其表戊之對數、而 $\frac{甲對}{一}$ 為其表之根、卽以根命

之、則得 $彳(戊對)＝根\frac{戊}{彳戊}$、與欵合、

系、準訥氏對數表 $根＝一$、則 $彳(戊對)＝\frac{戊}{彳戊}$、故凡數之訥氏對數微

分、等於本數之微分以本數約之、

設題

今有眞數四千八百二十五、求今表對數之微分若干、

以眞數之微分爲一、準前（本卷二款）以四千八百二十五約本表之根、卽得本數對數之微分、若用對數以相減代約、亦可、法如左、

今中國對數表根爲·四三四二九四、其對數爲九六三七八四、四千八百二

十五之對數爲•三六八三四九七、相減得•五九五四二八七、查得眞數爲•〇〇〇〇九〇、是爲四千八百二十五、與四千八百二十六、兩對數之較、即所求微分也、

今有九千六百五十一、求今表對數之微分若干、

答曰•〇〇〇〇四五、

今有五千七百九十一、求今表對數之微分若干、

答曰•〇〇〇〇七五、

今有三千八百一十、求今表對數之微分若干、

答曰 ·○○○一一四、

用上二款、合前卷諸款之例、可馭繁重之題、設題如左、凡指數對數之微分、後皆用訥氏表、若欲改用他表、但以他表之根乘所得數、即得、

今有 $\text{戊}=\frac{\text{甲丅天}}{\text{甲丄天}}\text{對}$ 試以分數對數二款之例、求其微分、

答式 $\frac{\text{甲}^{二}\text{丅天}^{二}}{\text{二甲仸}}$、

今有$戊=\frac{\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}}{天}$對、試以分數根數對數三款之例、求其微分、

答式$\frac{天\left(甲^{二}丄天^{二}\right)}{甲^{二}彳天}$、

今有$戊=\left(甲^{天}丄一\right)^{二}$、試以多項數指數二款之例、求其微分、

答式$二甲^{天}\left(甲^{天}丄一\right)甲對彳天$、

今有$戊=\frac{甲^{天}丄一}{甲^{天}丅一}$、試以分數指數二款之例、求其微分、又設$甲=一○$

天＝一二、求變大比例若干、

答式 $\frac{(甲^{天}丄一)^{二}}{二甲^{天}甲對彳}$、訥氏表十之對數爲二．三○二、故變大比例爲．○四五、

今有 $戊＝地^{天}$、地與天皆爲變數、試求其微分、且詳其理、

答曰、此式兩邊之對數爲 戊對＝天地對、故 $\frac{戊}{彳戊}＝地對彳丄天\frac{地}{彳地}$、而 $彳戊＝戊地對彳丄戊天\frac{地}{彳地}$、以戊之同

數 $地^{天}$ 代戊、則得 $彳戊＝他^{天}＝地^{天}地對彳丄天地^{天丅一}彳地$、此爲二微分之和、先以天爲變

數地為常數、求得天之微分、次以地為變數、天為常數、求得地之微分、并之、得此式、

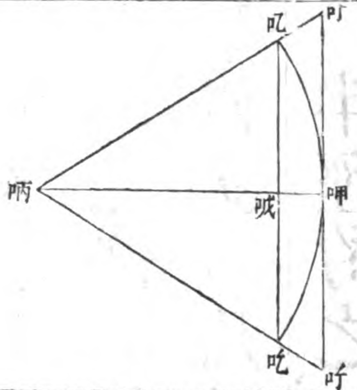
今有$戊=\frac{天^{天}}{甲^{天}}=\left(\frac{天}{甲}\right)^{天}$、試求其微分、

答式 $\left(\frac{天}{甲}\right)^{天}\left(\frac{天}{甲}對\ 丁一\right)彳天$、

圜函數微分

第三款　凡平圜上小于象限之弧、必大于正弦、小于正切、

如圖、呷叱弧小于象限、其正弦叱吰、正切呷叮、試



取呷吃弧等于呷𠮙、作正弦𠮙吠、成通弦𠮙吃、𠮙吃爲直線、必小于𠮙呷吃弧線、而𠮙吠正弦爲𠮙吃通弦之半、則必小于𠮙呷吃弧線之半𠮙呷、是弧大于正弦也、又呷𠮙哂面積爲$\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{呷哂}\times\text{呷𠮙弧}$、呷叮哂三角形積爲$\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{呷哂}\times\text{呷叮}$、呷𠮙哂面積爲呷叮哂三角形所容、則必小于三角形積、所以$\frac{\text{一}}{\text{二}}\text{呷哂}\times\text{呷𠮙弧} < \frac{\text{一}}{\text{二}}\text{呷哂}\times\text{呷叮}$即$\text{呷𠮙弧} < \text{呷叮}$、是弧小于正切也、

一系、正弦與弧比例之限爲一、試命呷𠮙弧爲辛、

變小至于○、則正弦與正切之比例爲一、準三角法$\frac{\text{切}}{\text{弦}}=\frac{\text{味}}{\text{餘弦}}$、而○之餘弦與半徑等、故$\text{辛}=○$、則$\frac{\text{切辛}}{\text{弦辛}}=\text{一}$、弧恆在弦切之間、故至限時、必得$\frac{\text{辛}}{\text{弦辛}}=\text{一}$、

二系、弧之通弦、恆小于弧而大于正弦、準前論、本款一系 至限時、正弦與正切之比例爲一、則通弦與弧之比例亦爲一、

第四款　凡正弦之微分、等于餘弦乘弧之微分以半徑約之、

加

戊＝天弦、

以辛加天、則得

戌＝(天丄辛)弦、

而

戌丅戊＝(天丄辛)弦丅天弦

(一)、準八線法得下式

呷弦丅吃弦＝$\frac{呲}{二}$╳三(呷丅吃)弦三(呷丄吃)餘弦

(二)、令

呷＝天丄辛

吃＝天、

則(二)式爲

(天丄辛)弦丅天弦＝$\frac{嗤}{三}$╳三辛弦(天丄三辛)餘弦、

故(一)式爲

戌丅戊＝$\frac{嗤}{三}$╳三辛弦(天丄三辛)餘弦、

此式之兩邊各以辛約之、而右邊母子又皆以二約之、得

$\frac{辛}{戌丅戊}$＝$\frac{三辛}{(三辛)弦}$╳$\frac{味}{(天丄三辛)餘弦}$

爲函數與變數二長數之比例、求其限、令長數等于〇、十卷三款則得$\frac{三辛}{(三辛)弦}=一$、本卷三款一系故$\frac{伕}{彼}=\frac{味}{天餘弦}$、即$彼=彳(伕弦)=\frac{味}{天餘弦伕}$、與款合、

設題

今有弧、每秒長一分、當三十度時、其正弦之微分若干、

答曰、弧之微分爲一分、依半徑取其數、得•〇〇〇二九〇九、其對數爲六四六三七二六、三十度之餘弦對數爲九九三七五三一、二對數相加、以

半徑對數減之得六四〇一二五七、檢表得眞數〇〇〇〇〇二五二、爲三十度與三十度一分二正弦之較、卽所求微分也、

今有弧十度三十一分、求其正弦之微分若干、

答曰〇〇〇〇〇二八六、

今有弧六十度四十六分、求其正弦之微分若干、

答曰〇〇〇〇〇一四二、

今有弧八十度四十一分、求其正弦之微分若干、

答曰〇〇〇〇〇〇四七、

第五款　凡餘弦之微分為負、等于正弦乘弧之微分、以半徑約之、弧度漸增、則餘弦漸減、故其微分為負、

如

$\text{戊}=\text{天餘弦}$、

則

$\text{彳戊}=\text{彳}(\text{天餘弦})=\text{彳}(\overline{\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天弦}})$、

準前

$\text{彳}(\overline{\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天}}\,\text{弦})=\dfrac{\text{味}}{(\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天})\,\text{餘弦}\,\text{彳}(\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天})}$

㊀、

本卷四款別得

$(\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天})\,\text{餘弦}=\text{天弦}$

$\text{彳}(\text{九〇度}\,\text{丅}\,\text{天})=\text{丅}\,\text{彳天}$、

用此二同數于㊀式中、得

$\text{彳}(\text{天餘弦})=\text{丅}\dfrac{\text{味}}{\text{天弦彳天}}$、

與款合、

系、凡弧小于九十度、其正矢恆等于半徑少餘弦、

故得式

彳(矢)＝彳(味丅天餘弦)＝$\frac{味}{天弦彳}$、

設題

今有弧六十五度十分、求其餘弦之微分若干、

答曰

T〇〇〇〇二六四、

今有弧五度三十一分、求其餘弦之微分若干、

答曰 丅○̇○○○○二八

第六款 凡正切之微分、等于半徑之平方乘弧之微分、以餘弦之平方約之、

如

$$\text{戊}=\text{天切}=\frac{\text{天餘弦}}{\text{味天弦}}、$$

則

$$\text{彳(天切)}=\frac{\text{天餘弦}^{\text{二}}}{\text{味天餘弦彳(天弦)丅味天弦彳(天餘弦)}}、$$

一十款卷十

即

$$\text{彳(天切)}=\frac{\text{天餘弦}^{\text{二}}}{\text{(天餘弦}^{\text{二}}\text{丄天弦}^{\text{二}}\text{)彳天}}、$$

款本五卷四

別得

$$\text{天餘弦}^{\text{二}}\text{丄天弦}^{\text{二}}=\text{味}^{\text{二}}、$$

故

$$\text{彳(天切)}=\frac{\text{天餘弦}^{\text{二}}}{\text{味}^{\text{二}}\text{彳天}}、$$

與款

合、

設題

今有弧四十五度、求其正切之微分若干、

答曰 〇.〇〇〇五八、

今有弧六十四度十四分、求其正切之微分若干、

答曰 〇.〇〇一五四、

第七款 凡餘切之微分爲負、等于半徑之平方乘弧之微分、以正弦之平方約之、

如

$戌 = 天餘切$

$彳戌 = 彳(天餘切) = 彳(\overline{九〇度丅天切})$、

準前得

$彳(\overline{九〇度丅天切}) = \frac{(九〇度丅天)餘弦^{二}}{味^{二}彳(九〇度丅天)}$

㊀、本卷六款

別得

$彳(九〇度丅天) = 丅彳天$、

$(九〇度丅天)餘弦^{二} = 天弦^{二}$、

故㊀式爲

$彳(天餘切) = 丅\frac{天弦^{二}}{味^{二}彳天}$、

與款合、

設題

今有弧三十五度六分、求其餘切之微分若干、

答曰

丅〇〇〇〇八八、

今有弧二十一度三十五分、求其餘切之微分若干、

答曰　丅〇〇〇二一五、

已上爲弦切諸線眞數之微分、用本卷第二款與上諸款合推、可得弦切諸線對數之微分、

第八款　凡正弦對數之微分、等于對數根乘本弧之微分、以正切約之、

準第二款得 $彳(天弦對)＝\frac{天弦}{根彳(天弦)}$、準第四款、右數變爲 $\frac{味天弦}{根天餘弦彳}$、依入線理

$\text{天切}=\dfrac{\text{天餘}}{\text{味天弦}}$

故

$\text{(依弦對)}=\dfrac{\text{天切}}{\text{根依}}$

與款合、

設題

今有弧每秒中長一秒、當十分三十秒時、求其正弦對數之微分若干、

答曰、弧之微分爲一秒、依半徑取其數、得五八四〇〇〇〇〇、其對數爲五七五五八六四、對數根之對數爲四八七七三六九、兩對數相加、則得九五三三二三四一、

以十分三十秒正切之對數七四八四九一七減之得六八三八四四二檢表得眞數〇〇〇〇六八九爲十分三十秒與十分三十一秒二正弦對數之較即所求微分也

今有弧四度二十八分求其正弦對數之微分爲若干

答曰〇〇〇〇〇二七

第九款　凡餘弦對數之微分爲負、等于對數根乘正切、又以弧之微分乘之、半徑之平方約之、

準第二款得 $彳(天餘弦對)=\frac{天餘弦}{根彳(天餘弦)}$、準第五款右數變爲 $丅\frac{味天餘弦}{根天弦彳天}$、依八線理 $\frac{天餘弦}{天弦}=\frac{味}{天切}$、故 $彳(天餘弦對)=丅\frac{味^{二}}{根天切彳天}$、與款合、

設題

今有弧六十七度三十分、求其餘弦對數之微分若干、

答曰 丅〇〇〇〇〇〇五、

今有弧八十九度三十分三十秒、求其餘弦對數之微分若干、

答曰 丅〇〇〇〇二四五、

第十款 凡正切對數及餘切對數之微分、各等于對數根乘半徑、又以弧之微分乘之、以正餘弦相

乘數約之、

準第二款得

$$彳(天切對)=\frac{天切}{根彳(天切)}、$$

準第六款右數變為

$$\frac{天餘弦^{二}天切}{根味^{二}伏}、$$

依八線理

$$天餘弦天切=味天弦、$$

故

$$彳(天切對)=\frac{天弦天餘弦}{根味伏}、$$

又

$$彳(天餘切對)=\frac{丅天餘切}{根彳(天餘切)}、$$

準第七款右變為

$$丅\frac{天弦^{二}天餘切}{根味^{二}伏}、$$

依八線理

$$天弦天餘切=味天餘弦、$$

故

$$彳(天餘切對)=丅\frac{天弦天餘弦}{根味伏}、$$

與款俱合、是以正切餘切二對數之微分同、所

異者正負耳、
案、正切對數之微分、等于正餘弦二對數微分之和、合觀諸款、理自顯、

設題

今有弧十分三十秒、求其正切對數之微分若干、

答曰〇〇〇〇六八九、

今有弧十度十六分、求其正切對數之微分若干、

答曰〇〇〇〇〇一一二、

今有弧八十九度四分三十秒求正切對數之微分若干、

答曰 ○.○○○一三○、

弦切諸微分、既爲弧微分之屬數、則亦可以弧爲函數、以弦切諸線爲自變數而求微分、

命弧爲人、設

$$地=人弦、$$

則得

$$彳地=\frac{味}{人餘弦彳人}、$$

本卷四款

故

$$彳人=\frac{人餘弦}{味彳地}$$

㊀、惟

$$人餘弦^{二}\perp人弦^{二}=味^{二}、$$

所以

$$人餘弦=\sqrt{味^{二}\top人弦^{二}}=\sqrt{味^{二}\top地^{二}}、$$

用此同數于㈠式中、得 $彳乂=\frac{\sqrt{味^{二}丅地^{二}}}{味彳地}$、即弧爲函數、正弦爲自變數、

又設 $地=人餘弦$、則得 $彳地=丅\frac{味}{人弦彳乂}$、本卷五款 故 $彳乂=\frac{人弦}{味彳地}$、惟 $人弦=\sqrt{味^{二}丅人餘弦^{二}}=\sqrt{味^{二}丅地^{二}}$、所以 $彳乂=丅\frac{\sqrt{味^{二}丅地^{二}}}{味彳地}$、即弧爲函數、餘弦爲自變數、

又設 $天=人矢$、則得 $彳天=\frac{味}{人弦彳乂}$、本卷五款系 故 $彳乂=\frac{人弦}{味彳天}$、惟 $人弦=\sqrt{(二味丅天)天}$、所以 $彳乂=\frac{\sqrt{二味天丅天^{二}}}{味彳天}$、即弧爲

函數、正矢為自變數、又設 $酉=人切$、則得 $彳酉=\frac{人餘弦^{二}}{味^{二}彳八}$、本卷六款故 $彳八=\frac{味^{二}}{人餘弦^{二}彳酉}$、依八線理 $\frac{味}{人餘弦}=\frac{人割}{味}$、即 $\frac{味^{二}}{人餘弦^{二}}=\frac{人割^{二}}{味^{二}}=\frac{味^{二}丄人切^{二}}{味^{二}}=\frac{味^{二}丄酉^{二}}{味^{二}}$、所以 $彳八=\frac{味^{二}丄酉^{二}}{味^{二}彳酉}$、即弧為函數、正切為自變數、

令 $味=一$、則上諸式變為 $彳八=\frac{\sqrt{一丅地^{二}}}{彳地}$、地為正弦、為 $彳八=\frac{\sqrt{一丅地^{二}}}{丅彳地}$ 地為餘弦、為 $彳八=\frac{\sqrt{二天丅天^{二}}}{彳天}$ 天為正矢、為 $彳八=\frac{一丄酉^{二}}{彳酉}$、酉為正切

設題

今有二物在圜徑之端同時起程、一以平速行于圜徑、一秒中過十尺、一以加減速行于圜周、二物恆同在一正弦上圜徑長四十尺當圜周物行至六十度時、其速率若干尺、

答曰、一秒中$\frac{\text{三}}{\text{二〇}}$、

今有二物同時從圜徑之端起程、一以平速行于切線、一秒中過十尺、一以加減速行于圜周、二物恆同在一割線上、圜徑爲五十尺、當圜周物行至四

十五度時、其速率若干、

答曰、一秒中五尺、

準馬氏術、天之正餘弦諸線、可詳爲天之諸級數、

設題

今有天弦試詳其級數、

答曰、設戊＝天弦、準前款（本卷四款五款）得

$\frac{彳戊}{彳天}=天餘弦$

$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=\mathrm{T}天弦$

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=\mathrm{T}天餘弦$

$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}=天弦$、

以下類推、令天＝〇、則得

$(戊)=〇$

$\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)=一$

$\left(\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}\right)=〇$

$\left(\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}\right)=\mathrm{T}一$

$\left(\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}\right)=〇$

以下類推、故準馬氏術（一卷十一款）得

$$天弦=天\,\mathrm{T}\,\frac{天^{三}}{二\times三}\,\perp\,\frac{天^{五}}{二\times三\times四\times五}\,\mathrm{T}\cdots$$、

即

級數也、

今有天餘弦、試詳其級數、

答曰、設戊＝天餘弦、準前本卷五款四款得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}=\text{丁天弦}$

$\frac{\text{彳天}^{\text{二}}}{\text{彳戊}}=\text{丁天餘弦}$

$\frac{\text{彳天}^{\text{三}}}{\text{彳戊}}=\text{天弦}$

$\frac{\text{彳天}^{\text{四}}}{\text{彳}^{\text{四}}\text{戊}}=\text{天餘弦}$、

以下類推、令天＝〇、則

得

$(\text{戊})=\text{一}$

$\left(\frac{\text{彳天}}{\text{彳戊}}\right)=\text{〇}$

$\left(\frac{\text{彳天}^{\text{二}}}{\text{彳戊}}\right)=\text{一}$

$\left(\frac{\text{彳天}^{\text{三}}}{\text{彳戊}}\right)=\text{〇}$

$\left(\frac{\text{彳天}^{\text{四}}}{\text{彳}^{\text{四}}\text{戊}}\right)=\text{一}$、

以下類推、故依馬氏術十一卷一款得

$\text{天餘弦}=\text{一丁}\frac{\text{二}}{\text{天}^{\text{二}}}\text{丄}\frac{\text{二乂三乂四}}{\text{天}^{\text{四}}}\text{丁}\cdots$、

即級數也、

天之同數愈小、則級數之斂愈速、用以造正餘弦

諸表爲最便、

代微積拾級卷十四

米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯

海寧　李善蘭　筆述

微分五

曲線義

凡求線式之微分所得式、顯縱橫線微分相屬之理、名曰線微分式、

如直線之式　乙丄天甲＝地　㊀、求微分得　$甲 = \frac{彳地}{彳天}$　㊁、此式無論乙為

何數俱同㊁式再求微分得 $\frac{彳天^{二}}{彳地}=○$ ㊂、此式甲乙之同數俱不論、凡直線在縱橫軸之平面內者皆如是、名一次線微分式、

又如平圜之式 $天^{二}⊥地^{二}=味^{二}$ ㊀、求微分得 $二天彳天⊥二地彳地=○$ 即 $\frac{彳天}{彳地}=⊤\frac{地}{天}$ ㊁、此式味之同數不論、故凡同縱橫軸之平圜皆如是、

又如拋物線之式 $地^{二}=二巳天$ ㊀、求微分得 $二地彳地=二巳彳天$、即 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{地}{巳}$ ㊁、準㊀式 $巳=\frac{二天}{地^{二}}$、則㊁式可變為 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{二天}{地}$、此式二巳之同數不論、故凡

同縱橫軸之拋物線皆如是、

試取二次線之公式地^{二}＝寅天⊥卯天^{二}㊀、八卷二款附論末條求微分得二地彳地＝寅彳天⊥二卯天彳天㊁、以彳天為常數、再求微分、得二彳地^{二}⊥二地彳地＝二卯彳天^{二}、以二約之、得彳地^{二}⊥地彳地＝卯彳天^{二}㊂、

合㊀㊁㊂式以消去寅卯二元、得地^{二}彳天^{二}⊥天^{二}彳地^{二}⊥地天^{二}彳地⊤二天地彳天彳地＝〇、為二次線之

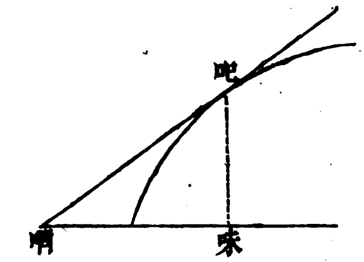
公微分式　準此則凡式、可遞求微分以消去常元、常數之元爲常元視常元有若干、則遞求若干次、必令求得諸式、加入原式之數、較常元數多一數、則相消後所得式、常元必去盡、而式之線與原式線同類、

前已識別得凡曲線之切線與橫軸交角之正切、等于縱線第一次微係數十二卷一款準此、可得切線次切線法線次法線四線之公式、

第一款　凡曲線以正交縱橫二線爲準、則無論何

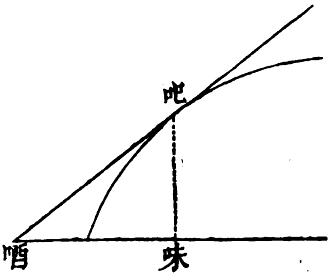
點之次切線等于縱線乘橫線微係數、

如吧味哂句股形、依三角術有比例$一：哂味∷哂切：吧味$



即$一：哂味∷\frac{伕}{㢟}：地$、故$哂味＝地\frac{㢟}{伕}$、與款合、

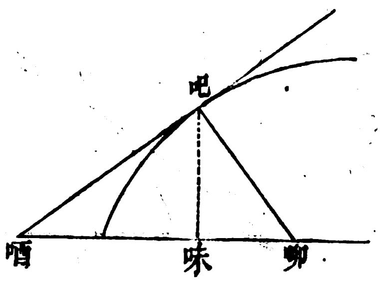
第二款　凡曲線以正交縱橫線爲準、則切線恆等于縱線次切線二冪和之平方根、



如吧味哂句股形$吧哂^{二}＝吧味^{二}丄哂味^{二}$、即$吧哂^{二}＝地^{二}丄地^{二}\frac{㢟^{二}}{伕^{二}}$、所以切線之

式爲 $吧哂=\sqrt{地^{二}\perp地^{二}\frac{彳地^{二}}{彳天^{二}}}=地\sqrt{一\perp\frac{彳地^{二}}{彳天^{二}}}$ 與款合、

第三款　凡曲線之次法線、恒等于縱線之微係數乘縱線、

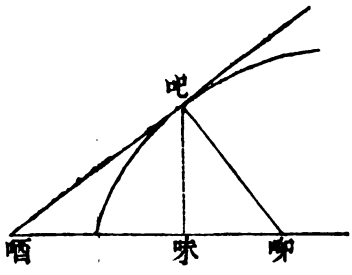


如吧味咖句股形、依三角術有比例 $一:吧味::味吧咖切:味咖$、

味吧咖與吧哂味二角等、故得 $一:吧味::味哂吧切:味咖$、卽 $一:地::\frac{彳天}{彳地}:味咖$、

所以次法線之式爲 $味咖=地\frac{彳天}{彳地}$、與款合、

第四款　凡曲線之法線、恆等于縱線次法線二冪和之平方根、



如吧味唎句股形 $\text{吧唎}^2=\text{吧味}^2\perp\text{味唎}^2$、即 $\text{吧唎}^2=\text{地}^2\perp\frac{\text{彳天}^2}{\text{地}^2\text{彳地}^2}$、所以法線之式爲 $\text{吧唎}=\sqrt{\text{地}^2\perp\frac{\text{彳天}^2}{\text{地}^2\text{彳地}^2}}=\text{地}\sqrt{一\perp\frac{\text{彳天}^2}{\text{彳地}^2}}$ 與款合、

用微分推曲線四線法、

無論何曲線、欲求上四款諸線、當先求本曲線之微分、而以 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}$ 或 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$ 之同數、用于四款之式中、又以縱橫

線代天地二元、則無論在曲線何點、得數俱一一密合、

如二次線之公式爲 $\text{地}^{2}=\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2}$、求微分、得 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{\text{二地}}{\text{寅}\perp\text{二卯天}}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2}}}{\text{寅}\perp\text{二卯天}}$、用此同數

于前四式中、得

$$\text{次切}=\text{地}\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\frac{\text{寅}\perp\text{二卯天}}{\text{二}(\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2})}$$

$$\text{切}=\sqrt{\text{地}^{2}\perp\frac{\text{彳地}^{2}}{\text{地}^{2}\text{彳天}^{2}}}=\sqrt{\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2}\perp\text{四}\left(\frac{\text{寅}\perp\text{二卯天}}{\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2}}\right)^{2}}$$

$$\text{次法}=\text{地}\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{\text{二}}{\text{寅}\perp\text{二卯天}}$$

$$\text{法}=\sqrt{\text{地}^{2}\perp\frac{\text{彳天}^{2}}{\text{地}^{2}\text{彳地}^{2}}}=\sqrt{\text{寅天}\perp\text{卯天}^{2}\perp\frac{\text{一}}{\text{四}}(\text{寅}\perp\text{二卯天})^{2}}$$、

前四式可用以推圜錐諸曲線之四線、試令二次線四式中 $卯=○$、則式變如下、即爲拋物線四線之式、

$次切=二天$ 此與五卷二款一系合

$切=\sqrt{寅天 ⊥ 四天^{二}}$

$次法=二寅$ 此與五卷三款系合

$法=\sqrt{寅天 ⊥ 四寅^{二}}$

又橢圜若以心爲縱橫軸之原點、則更得四簡式、

如橢圜原式爲 $呷^{二}地^{二} ⊥ 吃^{二}天^{二}=呷^{二}吃^{二}$ ㊀、求微分得 $呷^{二}地彳地 ⊥ 吃^{二}天彳天=○$、即 $\frac{彳地}{彳天}=丅\frac{吃^{二}天}{呷^{二}地}$、準前本卷一款

得 $次切=丅\frac{吃^{二}天}{呷^{二}地^{二}}$ ㊁、惟準㊀式得 $\frac{吃^{二}}{呷^{二}地^{二}}=呷^{二}丅天^{二}$、故㊁式之右數變爲 $丅\frac{天}{呷^{二}丅天^{二}}$、與六

卷七款二系合又準前本卷三款得

$$\text{次法}=\text{地}\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{丅}\frac{\text{呷}^{二}}{\text{吃}^{二}}\text{天}$$

與前合、六卷八款一系

又平圜呷與吃等、故準上橢圜兩式及前、本卷二款四款得

$$\text{次切}=\text{丅}\frac{\text{天}}{\text{地}^{二}}$$

$$\text{切}=\sqrt{\text{地}^{二}\text{丄}\frac{\text{天}^{二}}{\text{地}^{四}}}=\sqrt{\frac{\text{天}^{二}}{\text{味}^{二}\text{地}^{二}}}=\frac{\text{天}}{\text{味地}}$$

$$\text{次法}=\text{丅天}$$

$$\text{法}=\sqrt{\text{地}^{二}\text{丄天}^{二}}=\text{味}$$、

俱與幾何理合、

設題

今有拋物線之通徑四寸、橫線九寸、求縱線次切線各若干、

答曰、縱線六寸、次切線十八寸、

今有橢圜之長徑三十寸、短徑十六寸、以中點爲原點、橫線十寸、求其次切線若干、

答曰、八十寸、

今有橢圜之長徑六寸、短徑四寸、以中點爲原點、橫線二寸、求其次法線若干、

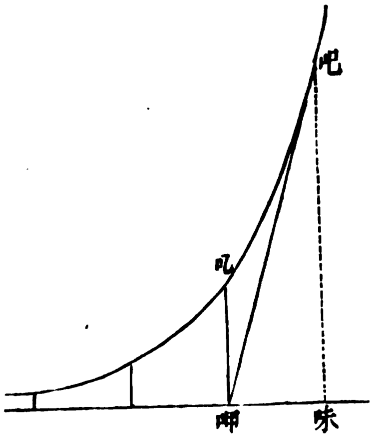
答曰、九分寸之八、

今有平圜徑十尺、以中心爲原點、橫線三尺、求其切線及次切線各若干、

答曰切線爲$\sqrt{\frac{九}{一〇〇\times九一}}$、卽$\frac{三}{\sqrt{九一}一〇}$次切線爲$\frac{三}{九一}$、

求對數曲線之次切線、

如$天=地對$、九卷對數曲線條求微分得$彳=\frac{地}{根㐌}$、十三卷二款卽$地\frac{㐌}{彳}=根$、別得$地\frac{㐌}{彳}$、卽次切線之式、本卷一款所以對數曲線之次切線爲



常數、恆等于本對數之根、

訥氏之對數$根=一$、則次切線呷味等于

呷叱、

過所設點之直線式爲 地丁地′＝甲(天丁天′)、三卷三款 此式甲爲直線與橫軸交角之正切、已別得曲線之切線與橫軸交角之正切、等于第一次微系數 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$、十二卷一款 所以縱橫線天地之切線式爲 地丁地′＝$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$(天丁天′) ㊀、法線爲切線之垂線、則其式必爲 地丁地′＝丁$\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}$(天丁天′) ㊁、三卷六款附論末條 凡求曲線之切線式、法求本曲線之微分、得 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$ 之同數、用于㊀式中、

卽得

設題

今有平圜任一點、求其切線式、

平圜之式為$天'^{二}丄地'^{二}=味^{二}$、求微分得$\frac{彳天}{彳地}=丅\frac{地'}{天'}$、用此同數于㊀式中、

得$地丅地'=丅\frac{地'}{天'}(天丅天')$、卽平圜切線式、變之得$地地'丄天天'=天'^{二}丄地'^{二}=味^{二}$、與前合、四卷四款

今有拋物線、求任一點之切線式、

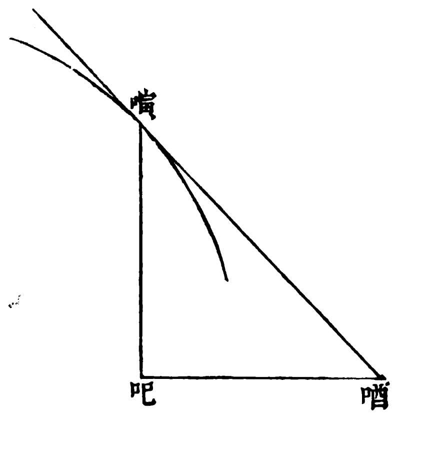
拋物線之式為$地'^{二}=二巳天'$、求微分得$\frac{彳天}{彳地}=\frac{地'}{巳}$、用此同數于㊀式

中得地丅地′＝$\frac{地'}{巳}$(天丅天′)、即拋物線切線式變之得地地′丅地′²＝巳(天丅天′)、惟地′²＝二巳天′、故得地地′＝巳(天丄天′)

與前合、五卷二款

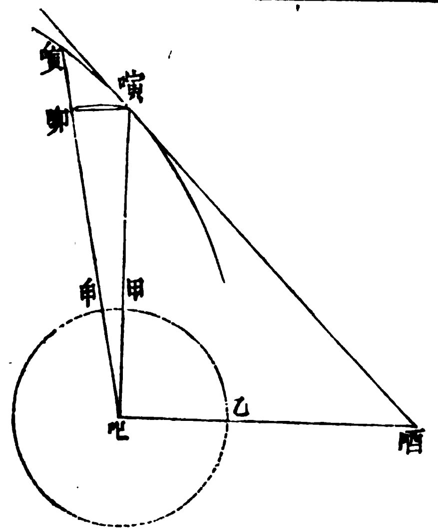
論極曲線之次切線切線

凡極曲線之次切線、正交帶徑于極點、以帶徑界點之切線爲界、



如圖吧爲極點、吧嗔爲帶徑、嗔哂爲嗔點之切線、吧嗔之垂線吧哂、即次切線、

微係數



如圖、吧嗬爲帶徑、命爲未、命乙甲弧爲酉、圜半徑吧甲等于一、設酉弧有長數甲申、命爲辛、過申作帶徑吧嗬、又以吧嗬爲半徑作嗬唦弧及嗬唦通弦、又作吧哂、與嗬唦平行、甲申爲酉之長數、唦嗬爲未之長數、以酉爲自變數而求未之微係數、法當求二長數之比例

而令辛〓○、以求比例之限、十卷三款準幾何理有比例、嗔卯弧:吧嗔::甲申:一

故 $\frac{\text{嚊嗔卯弧}}{}$ 〓 甲申

一、嗔卯嗔與嗔吧哂為相似三角形、則又

有比例、吧哂:嗔吧::嗔卯通弦:嗔卯、故 $\frac{\text{嗰}}{\text{嗔卯通弦}\times\text{嗔吧}}$ 〓 嗔卯

二、以二式約一式、得 $\frac{\text{嗔卯通弦}}{\text{嗔卯弧}}\times\frac{\text{吧嗔}\times\text{吧嗔}}{\text{吧哂}}$ 〓 $\frac{\text{嗔卯}}{\text{甲申}}$、即末

酉二長數之比例、令辛〓○、求比例之限、則嗔卯弧與

嗔卯通弦之比例必為一、十三卷三款二系而吧嗔等于

吧嗔、命為末、吧哂為次切、故得式 $\frac{\text{末}}{\text{吧哂}}$ 〓 $\frac{\text{徠}}{\text{哂}}$、故 $\frac{\text{徠}}{\text{末哂}}$ 〓 $\frac{\text{吧}}{\text{哂}}$、與款合、

系吧嗔哂角之正切等于$\frac{嗔}{哂}$、故式之右變為$\frac{徠}{未徆}$、即

切線與帶徑交角之正切、

第六款　極曲線之切線、等于次切帶徑二平方和之平方根、

準前圖、切線嗔哂等于$\sqrt{吧嗔^{二}丄吧哂^{二}}$、即等于$未\sqrt{一丄\frac{徠^{二}}{徆^{二}}}$、理易明、

凡一切螺線、俱依上二款推之、

如亞奇氏螺線之式為$未=\frac{二周}{酉}$、九卷二款求微分、得$\frac{徠}{徆}=二周$、用此

二同數于次切公式中、本卷五款得$次切=\frac{二周}{酉^{二}}$、若切線在一匝

弧線之端、則$酉＝二周$、卽得$次切＝二周$、則次切等于帶徑爲半徑之圜周、若切線在寅匝弧線之端、則$酉＝二寅周$、卽得$次切＝寅二寅周$、則次切等于寅倍切點上帶徑爲半徑之平圜周、

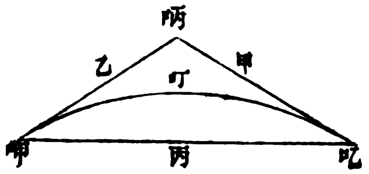
如雙線螺線之式爲$未＝\frac{酉}{甲}$、（九卷三款）求微分得$\frac{徐}{循}＝丁\frac{甲}{酉^{二}}$、用此二同數于次切線公式中、（本卷五款）得$次切＝丁\frac{甲}{未酉^{二}}＝丁甲$、故雙線螺線之次切爲常數、

如對數螺線之式爲$對未＝酉$、（九卷四款）求微分得$循＝\frac{未}{根徐}$、卽$\frac{徐}{未循}＝根$、故

切線與帶徑交角之正切本卷五款系爲常數、卽本對數之根、

論曲線及曲線之面積曲面體積諸微分

第七款　凡曲線之通弦與曲線比例之限、爲一、

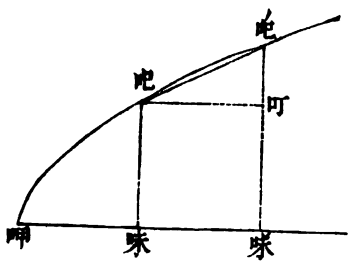


如圖、呷叮吃爲曲線之一段、呷吃爲通弦、命爲丙、于曲線之二端作呷㖀㖀吃二切線、命爲乙與甲、呷叮吃曲線分、大于通弦丙、小于二切線甲乙之和、準三角例得

$$\frac{丙}{甲}=\frac{㖀弦}{呷弦}$$

$\frac{丙}{乙}=\frac{㖼弦}{吃弦}$、故$\frac{丙}{甲\perp乙}=\frac{㖼弦}{呷弦\perp吃弦}=\frac{(呷\perp吃)弦}{呷弦\perp吃弦}$、又得$\frac{(呷\perp吃)弦}{呷弦\perp吃弦}=\frac{三(呷\perp吃)餘弦}{三(呷丅吃)餘弦}$、故$\frac{丙}{甲\perp乙}=\frac{三(呷\perp吃)餘弦}{三(呷丅吃)餘弦}$、設呷吃二點漸相近、則呷叮吃曲線漸損、而呷吃二角亦漸損、損至最微不可思議時、則呷丅吃、呷⊥吃皆漸近于〇、而$三(呷丅吃)餘弦$、$三(呷\perp吃)餘弦$皆漸近于公限一、所以$甲\perp乙$與丙比例之限爲相等、而呷叮吃曲線既不能大于甲乙和、亦不能小于丙則曲線與通弦比例之限、更爲相等矣、

第八款　凡曲線之微分、恆等于直角縱橫線二微分平方和之平方根、



準前曲線與通弦比例之限爲一、本卷七款試以呷咊爲曲線之橫線、命爲天、以吧咊爲曲線之縱線、命爲地、命長數咊咊′爲辛、加于天、則地之同數必變爲吧′咊′、命爲地′、乃與呷咊平行作吧叮、則得

$$\text{吧吧′通弦}=\sqrt{\text{吧叮}^{二}\perp\text{吧′叮}^{二}}=\sqrt{\text{辛}^{二}\perp\text{吧′叮}^{二}}$$、

則得

$$\text{吧′叮}=\text{地′}\top\text{地}=\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}\text{辛}\perp\frac{\text{彳}^{二}\text{地}}{\text{二彳天}^{二}}\text{辛}^{二}\perp\cdots$$、

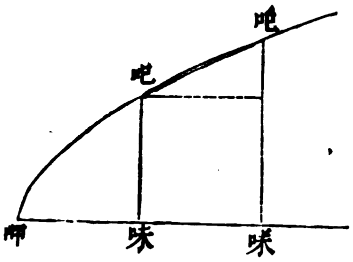
十一卷三款用此同數于通弦式中、則得$\frac{呝}{吧}=\sqrt{辛^{二}丄\frac{仸^{二}}{彵^{二}}辛^{二}丄\cdots}=辛\sqrt{一丄\frac{仸^{二}}{彵^{二}}丄\cdots}$、故$\frac{辛}{\frac{呝}{吧}}=\sqrt{一丄\frac{仸^{二}}{彵^{二}}丄\cdots}$、卽函數與變數二長數之比例、求此比例之限、令長數同于〇、十卷三款則通弦等于曲線、命爲人而右邊辛之諸項消盡、故得$\frac{仸}{仈}=\sqrt{一丄\frac{仸^{二}}{彵^{二}}}$、以仸乘之、得$仈=\sqrt{仸^{二}丄彵^{二}}$、與款合、

設題

今有平圜弧線、試求其微分、

平圓之式為 $天^{2} \perp 地^{2} = 味^{2}$、求微分得 $天彳天 \perp 地彳地 = 〇$、即 $彳地 = \mathrm{T}\frac{地}{天彳天}$、則 $仈 = \sqrt{彳天^{2} \perp \frac{地^{2}}{天^{2}彳天^{2}}} = \frac{地}{彳天}\sqrt{天^{2} \perp 地^{2}}$、惟 $\sqrt{天^{2} \perp 地^{2}} = 味$、而 $地 = \sqrt{味^{2} \mathrm{T} 天^{2}}$、所以 $仈 = \frac{\sqrt{味^{2} \mathrm{T} 天^{2}}}{味彳天}$、與前合、十三卷十款後論

第九款 凡曲線面以正交縱橫線為界、其面積之微分、等于縱線乘橫線之微分、



如呷吧味為曲線面、以呷味吧味二直線為界、求其面積之微分、命橫線呷味為天、縱線吧味為地、命長數味味為辛

加于天、則地之同數變爲吧′味′、命爲地′、凡通弦與曲線比例之限爲一、則吧味味咮吧′三直線及吧吧′曲線爲界之面積、與此三直線及吧吧′通弦爲界之面積、其比例之限亦必爲一、故有式

$$吧味咮吧′面 = 味咮\frac{三}{二}\left(吧味 丄 吧′咮\right) = \frac{三}{二}辛\left(地 丄 地′\right)、$$

卽

$$\frac{辛}{吧味咮吧′面} = \frac{三}{二}\left(地 丄 地′\right)、$$

惟

$$地′ = 地 丄 \frac{彳天}{彳地}辛 丄 \frac{彳天}{彳彳地}\frac{三}{辛} 丄 \cdots、$$

十一卷三款

故

$$\frac{三}{二}\left(地 丄 地′\right) = 地 丄 \frac{彳天}{彳地}\frac{二}{辛} 丄 \cdots、$$

卽

$$\frac{辛}{吧味咮吧′面} = 地 丄 \frac{彳天}{彳地}\frac{二}{辛} 丄 \cdots、$$

爲函數與變數

二長數之比例、求其限、當令長數同于〇、十卷三款則

右邊辛之諸項消盡、命曲線面積爲申、則得$\frac{伸}{伕}=地$、即$伸=地伕$、與款合、

設題

今有平圜分面積、試求其微分、

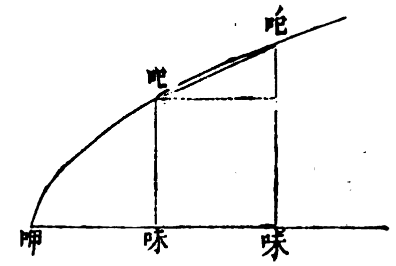
平圜之式爲$地^{二}=味丅天^{二}$、則$地=\sqrt{味丅天^{二}}$、故$伸=地伕=伕\sqrt{味^{二}丅天^{二}}$、即面積之微分、又設縱

橫線之原點在圜周、則其式爲地$=\sqrt{二未天丅天^{二}}$、面積之微分式、

改爲彳天$\sqrt{二未天丅天^{二}}$、

第十款　凡曲線體之曲面（一名皮積）微分、等于底面之

圜周乘母曲線之微分、



如曲線呷吧咆繞軸線呷味旋轉一匝

必行成曲面、求其微分、命呷味$=$天　吧味$=$地、又命咊味$=$辛、

爲長數、加于天、則地之同數變爲咆味、

命爲地當呷吧𠰳曲線旋轉時、吧𠰳二點必行成二圜周、而吧𠰳通弦必成圜錐截積之曲面、通弦與曲線比例之限既爲一、吧𠰳通弦所成曲面與吧𠰳曲線所成曲面其比例之限亦必爲一、準幾何理、吧𠰳通弦所行成之曲面、等于$\frac{二}{吧𠰳}\left(吧味圜周丄𠰳咊圜周\right)$、即等于下式

$\frac{二}{吧𠰳}\left(二周地丄二周地'\right)$、

即

$吧𠰳乂周\left(地丄地'\right)$、

故

$\frac{吧𠰳}{圜錐截積曲面}＝周\left(地丄地'\right)$、

惟

$地'＝地丄\frac{伏}{彳地}辛丄\frac{伏^{二}}{彳^{二}地}\frac{二}{辛^{二}}丄\cdots$、

則

$地'丄地＝二地丄\frac{伏}{彳地}辛丄\cdots$、

所以

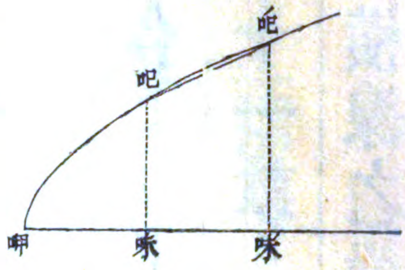
$\frac{吧𠰳}{圜錐截積曲面}＝周\left(二地丄\frac{伏}{彳地}辛丄\cdots\right)$、

爲

函數與變數二長數之比例、求其限令長數同于○、十卷三款則右邊辛之諸項消盡、命呷吧曲線爲人、

其行成之曲面爲呻、則得$\frac{彳乙}{彳呻}$＝二周地、即彳乙地周二＝彳呻、以乙之同數本卷八款代之、得三＝（彳乙丄彳吧）地周二＝彳呻、式中之地周二即吧點所成之圜周、與款合、

第十一款　曲線體積之微分、等于底面乘毋曲線橫線之微分、



如呷吧味曲線面繞軸線呷味旋轉一匝、必行成曲線體、求其微分命呷味＝天 吧味＝地、命長數咮味＝辛、加于天、則吒咮＝地'、命為地、當呷吒咮面旋轉之時、吧味咮吒四邊形必行成圜錐截體、此體與吧味咮咮吒三直線及吧吒曲線界內面所轉成之體、其比例之限為一、準幾何例吧味咮吒四邊形所轉成之圜錐截體、必等于下之式 $\frac{三}{一}$周味咮(吒味^{二}丄吒咮^{二}丄吧味×吧咮)、即 $\frac{三}{一}$周辛(地'^{二}丄地^{二}丄地地')、故 $\frac{辛}{圜錐截體}=\frac{三}{一}$周(地'^{二}丄地^{二}丄地地')

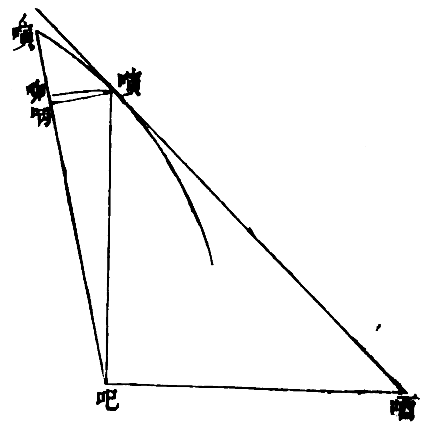
惟 地'＝地丄$\frac{彳天}{彳地}$辛丄$\frac{彳天^{二}}{二彳地}$辛^{二}丄…、十一卷三款 則 地'^{二}＝地^{二}丄$\frac{彳天}{二彳地}$辛地丄…、而 地地'＝地^{二}丄$\frac{彳天}{彳地}$辛地丄…、

所以得下式 $地^{二}丄地^{\prime}丄地地^{\prime}=三地^{二}丄\frac{彳天}{彳地}辛地丄\cdots$、即 $\frac{辛}{圓錐截體}=\frac{一}{三}周\left(三地^{二}丄\frac{彳天}{彳地}辛地丄\cdots\right)$、爲函數與變數二長數之比例、求其限、當令長數同于〇、十卷三款則右邊辛之諸項消盡、命曲線體爲亥、則得 $\frac{彳天}{彳亥}=周地^{二}$、即 $彳亥=周地^{二}彳天$、此 $周地^{二}$ 即吧味爲半徑之圜面積、與款合、

論極曲線及其面積之微分

第十二款　極曲線之微分、等于帶徑微分及帶徑

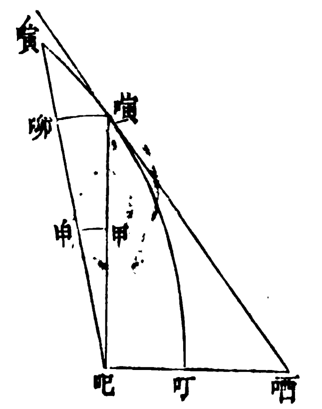
乘弧之微分二平方和之平方根



如吧嗔吧嗔爲極曲線之二帶徑、自嗔作吧嗔之垂線嗔哂、成嗔哂嗔句股形、則有式 $\text{嗔嗔通弦}=\sqrt{\text{嗔哂}^{2}+\text{哂嗔}^{2}}$ 又 $\frac{\text{哂嗔}}{\text{哂嗔}}=\text{哂嗔嗔切}$、故 $\frac{\text{哂嗔}}{\text{嗔嗔通弦}}=\sqrt{一+\text{哂嗔嗔切}^{2}}$、令帶徑之長數同于〇、則嗔嗔通弦與嗔嗔曲線得比例之限爲一、（本卷七款）又嗔哂漸近于嗔吧、則帶徑之長數與嗔哂股其比例之限亦爲一、而哂嗔嗔角變爲吧嗔哂角、其正切等于 $\frac{\text{徠}}{\text{徊}}$、（本卷五款系）命曲線

爲人、則得 $\frac{彳天}{彳人}=\sqrt{一\perp\frac{彳天^{二}}{禾^{二}彳酉^{二}}}$、即 $彳人=\sqrt{彳天^{二}\perp禾^{二}彳酉^{二}}$、與款合、

第十三款　極曲線面積之微分、等于帶徑平方乘弧線微分之半、



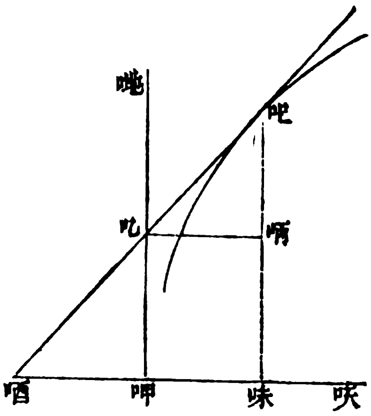
如吧嗔叮爲極曲線內之一段面積、設帶徑所過之弧、加長數甲申則由線面之長數爲吧嗔嗔準幾何理、嗔唦弧線內吧嗔唦一段面積、等于 $\frac{吧嗔^{二}}{二}\times嗔唦$、故有比例 $吧嗔:一::嗔唦:甲申$

則$\frac{吧嗔}{嗔咿}=\frac{甲}{申}$、所以$\frac{二}{吧嗔}=\frac{甲申}{吧嗔咿積}$、夫吧嗔與吧嗔比例之限爲一、
則吧嗔嗔與吧嗔咿二面比例之限亦必爲一、故
令長數爲〇、而命曲線面積爲申、帶徑所過之弧
爲酉、則得$\frac{二}{末}=\frac{酉}{伸}$、卽$\frac{二}{末酉}=伸$、與款合、

論曲線之漸近線

曲線之漸近線、恆與曲線漸相近、而永不相遇、距原點無窮遠時、一若卽曲線之切線、而永不能至切點、凡曲線之橫線愈長、其切線交縱橫軸之點、距原點

亦愈遠、若橫線之長爲無窮、二點之距原點亦無窮、則其切線非漸近線、若橫線之長爲無窮、而二點之距原點非無窮、則其切線卽漸近線、



如圖、呷爲原點、哂爲切線交軸點、哂吧爲切線、其縱橫線 天＝呷味 地＝吧味、次切線爲 $\frac{彳地}{彳天}=\frac{地}{哂味}$、以橫線呷味減之、得 $天-地\frac{彳天}{彳地}=呷哂$ ㈠ 爲呷哂之公式、卽呹線內二點相距之式、又吃爲切線交

縱軸之點、而天、$\frac{仸}{彵}=吶𠮙吧切=\frac{𠮙}{吶}=\frac{吧}{吶}$故得天$\frac{仸}{彵}$丅地$=\frac{吧}{吶}$丅$\frac{吔}{味}=\frac{呷}{𠮙}$㊁、為呷𠮙之公式、卽呲

線內二點相距之式、凡天地為無窮、而㊀式與㊁式亦俱無窮、則曲線無漸近線、兩式非無窮、則曲線有漸近線、若俱非無窮、則漸近線必斜交縱橫二軸、若一有窮一無窮、則必與一軸平行、若皆為〇、則必過原點、

設題

試求雙線有漸近線否、

縱橫線之原點、在雙線之中點、則其式爲$地^{二}=\frac{呷^{二}}{吃^{二}}(天^{二}\mathrm{T}呷^{二})$、七卷一款

案求微分得$\frac{彳地}{彳天}地=\frac{吃^{二}天}{呷^{二}地}=\frac{天}{天\mathrm{T}呷^{二}}$、故$\frac{呷}{唒}=地\frac{彳地}{彳天}\mathrm{T}天=\mathrm{T}\frac{天}{呷^{二}}$、此$\mathrm{T}\frac{天}{呷^{二}}$爲切線交橫軸點距原點之式、若天爲無窮、此式必爲〇、則雙線有過中點之漸近線、

試求拋物線有漸近線否、

拋物線之式爲$地^{二}=二巳天$、求微分得$地\frac{彳地}{彳天}=\frac{巳}{地^{二}}=二天$、故$\frac{呷}{唒}=天=地\frac{彳地}{彳天}\mathrm{T}天$、若天爲

無窮、此式亦必爲無窮、故拋物線無漸近線、

試求對數曲線有漸近線否、

對數曲線之式爲 $天=對地$、即 $地=甲^{天}$、若天爲無窮而負、則 $地=\frac{一}{甲^{\infty}}=〇$、

故對數曲線之橫軸即漸近線、觀九卷對數曲線圖、理自明、

代微積拾級卷十五

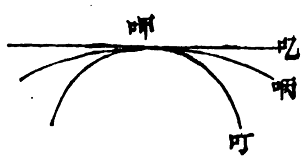
米利堅羅密士譔　　英國偉烈亞力口譯

海寧李善蘭筆述

微分六

曲率半徑

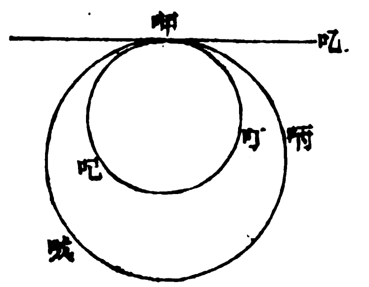
曲率者曲線離切線之率也如二曲線離切線遲速



不同其速者曲率較大也

如圖呷呐呷叮二曲線俱以呷𠮙爲切線呷叮離切線速于呷呐則其曲率大

于呷哂也、
凡圜周之曲率、各點俱同、二圜周半徑同、則其曲率亦同、因離切線之速同也、二圜周半徑不同、則半徑小者、曲率較大、

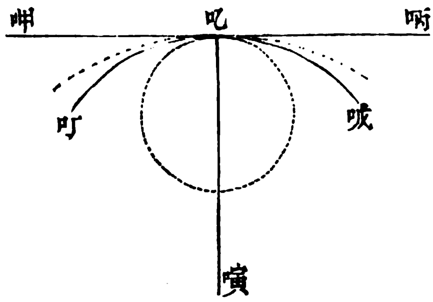


如圖、呷叮吧圜周、其離切線、速于呷哂呅圜周、故半徑愈小、則曲率愈大、半徑愈大、則曲率愈小、凡不同徑之圜周、以等長之弧線爲準、于其端各作二半徑成角、其二角度、卽曲率之比例率、

第一款　凡二不同徑之平圜其曲率與半徑有反比例、

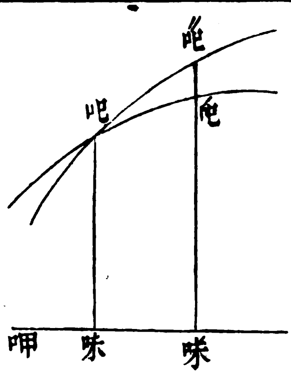
設命二半徑爲味味、二弧線之等長爲呷、第一弧端二半徑所成角爲角、第二弧端二半徑所成角爲角、準幾何理有比例 $二周味:呷::三六〇:角$、故 $角=\frac{二周味}{三六〇呷}$、又 $二周味:呷::三六〇:角$、故 $角=\frac{二周味}{三六〇呷}$、則又有比例 $角:角::\frac{二周味}{三六〇呷}:\frac{二周味}{三六〇呷}$、即 $角:角::\frac{味}{一}:\frac{味}{一}$、與款合、

無論何曲線、必有合吻圜、



如圖、叮叱哦爲曲線、呷叱哂爲叱點之切線、叱嗔爲叱點之法線、凡平圜心在叱嗔線內、而周經過叱點者、必俱以呷叱哂爲切線、故叮叱哦曲線與無數圜周同切于叱點、其曲率大于曲線者必在曲線內、小于曲線者、必在曲線切線之閒、而無數圜周中、必有一圜周、其曲率與曲線恰相合、即合吻圜也、一名曲率圜、圜之半徑、即名曲率半徑、

合吻圜與曲線相合甚密、



如圖、彼此二曲線、相交于吧點、命此曲線之縱橫線爲天地、彼曲線之縱橫線爲夭地′、命長數爲辛、加于天、爲天⊥辛、則得

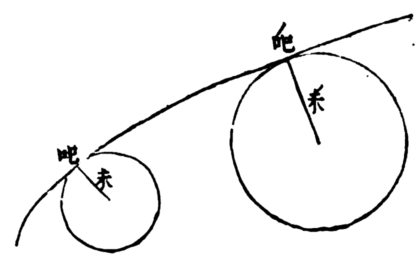
$$\text{吧}'\text{咪}' = 地 \perp \frac{彳地}{彳天}辛 \perp \frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}\frac{辛^{二}}{二} \perp \frac{彳^{三}地}{彳天^{三}}\frac{辛^{三}}{二三} \perp \cdots \quad (一)$$

$$\text{吧}''\text{咪}' = 地' \perp \frac{彳地'}{彳夭}辛 \perp \frac{彳^{二}地'}{彳夭^{二}}\frac{辛^{二}}{二} \perp \frac{彳^{三}地'}{彳夭^{三}}\frac{辛^{三}}{二三} \perp \cdots \quad (二)$$

、惟吧爲二曲線之公點、故地等于地′、又第一微係數爲切線交橫軸角之正切、十二卷一款、故

若吧點有公切線、則得 $\frac{彳天}{彳地}=辛\frac{彳天}{彳地}$ 所以㊀㊁兩式右邊諸微分項、數或相同、則二曲線相切、其相同之數愈多、則相切愈密、平圜之式爲二次式、止有二微係數、故平圜與曲線、若第一與第二微係數各相同、則其相切爲最密、

合吻圜與曲線相合甚密、故曲率可以合吻圜度之、如圖、取曲線吧吪二點、求此二點合吻圜之二半徑吧未吪未、有比例未一∶未二∷吪曲率∶吧曲率、故曲線諸點之曲率、與



合吻圜半徑有反比例、

第二款　凡曲線任一點之曲率半徑等于$\frac{彳弧^{三}}{彳天彳^{二}地}$、天地為本點之縱橫線、人為曲線之一段、

半圜之公式為$(天丁甲)^{二}\perp(地丁乙)^{二}=味^{二}$、甲乙為圜心之縱橫線、天地為圜周點之縱橫線、味為半徑、(四卷三款)求微分、以二約

之、得

$$(天\mathrm{T}甲)彳天\perp(地\mathrm{T}乙)彳地=〇$$、

以彳天為常數、再求微分、得

$$彳天^{二}\perp彳地^{二}\perp(地\mathrm{T}乙)彳地=〇$$、

故

$$地\mathrm{T}乙=\mathrm{T}\frac{彳地}{彳天^{二}\perp彳地^{二}}$$

一

$$天\mathrm{T}甲=\frac{彳天}{彳地}\left(\frac{彳地}{彳天^{二}\perp彳地^{二}}\right)$$

二、

用此二同數于平圜公式中、得

$$味^{二}=\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}\left(\frac{彳地}{彳天^{二}\perp彳地^{二}}\right)^{二}\perp\left(\frac{彳地}{彳天^{二}\perp彳地^{二}}\right)^{二}$$、

卽

$$味^{二}=\frac{(彳天彳地)^{二}}{(彳天^{二}\perp彳地^{二})^{三}}$$、

所以

$$味=\frac{彳天彳地}{(彳天^{二}\perp彳地^{二})^{三}}$$、

曲線之一段為人、則得

$$彳人^{二}=彳天^{二}\perp彳地^{二}$$、

十四卷八款

故上式變為

$$味=\frac{彳天彳地}{彳人^{三}}$$

三、

與款合、

凡求曲線之曲率半徑、以本曲線之式二次求微分、得彳天彳地彳彳地之諸同數、用于本款味式中、欲知曲線某點之曲率半徑、以本點之縱橫線代天地、卽得、

第三款　凡圜錐曲線各點之曲率半徑、等于各點法線之立方、以半通徑之平方約之、

圜錐諸曲線之公式爲

$$\text{地}^{2} = \text{寅天} \perp \text{卯天}^{2}\text{、}$$

附入卷二款

附論末條

故

$$\text{彳地} = \frac{\text{二地}}{(\text{寅} \perp \text{二卯天})\text{彳天}}$$

$$\text{彳天}^{2} \perp \text{彳地}^{2} = \frac{\text{四地}^{2}}{[\text{四地}^{2} \perp (\text{寅} \perp \text{二卯天})^{2}]\text{彳天}^{2}}\text{、}$$

又

$$\text{彳彳地} = \frac{\text{二地}^{2}}{\text{二卯地彳天}^{2} \top (\text{寅} \perp \text{二卯天})\text{彳天彳地}}\text{、}$$

卽 $\text{彳彳地}=\dfrac{\text{四地}^{三}}{[\text{四卯地}^{三}\text{丅}(\text{寅丄二卯天})]\text{彳天}^{二}}$、亦卽 $\text{彳彳地}=\dfrac{\text{四地}^{三}}{\text{丅寅}^{三}\text{彳天}^{二}}$、用此二同數于前款味式 $\text{味}=\dfrac{\text{彳天彳彳地}}{(\text{彳天}^{二}\text{丄彳地}^{二})^{\frac{二}{三}}}$ 中、則得

下式 $\text{味}=\dfrac{\text{二寅}^{二}}{[\text{四}(\text{寅天丄卯天})\text{丄}(\text{寅丄二卯天})^{二}]^{\frac{二}{三}}}$ 母子俱以八約之、得 $\text{味}=\dfrac{\text{四寅}^{二}}{[\sqrt{\text{寅天丄卯天}^{二}}\text{丄四}(\text{寅丄二卯天})^{二}]^{\frac{二}{三}}}$、此式之子數、爲法

線之立方、十四卷四款後用微分推曲線條 其母數、爲半通徑之

平方、八卷二款後附論末條 與款合、

一系、凡圜錐曲線各點曲率半徑之比、若各點法

線立方之比、

二系、若天同于○、則得$味=\frac{二}{寅}$—半通徑、故凡圜錐曲線遇長徑點之曲率半徑、等于本通徑之半、

三系、求橢圜遇短徑點之曲率半徑、別得$寅=\frac{呷}{二吃^{二}}$　$卯=丅\frac{呷^{二}}{吃^{二}}$　$天=呷$、用此諸同數于本款式中、則化為$味=\frac{吃}{呷^{二}}$、故其曲率半徑、亦等于本通徑之半、

四系、拋物線$卯=○$、則本款之式化為$味=\frac{二寅^{二}}{(寅^{二}丄四寅天)^{\frac{三}{二}}}$、若$天=○$、則得$味=\frac{二}{寅}$、

爲拋物線頂點之曲率半徑

設題

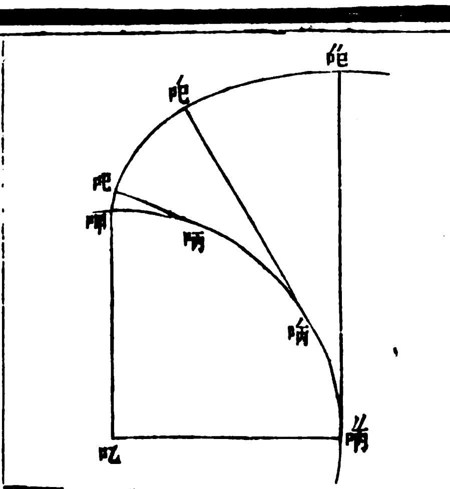
今有拋物線內一點、其橫線九、縱線六、試求其曲率半徑若干、 答曰$\frac{\text{一二八}}{(\text{三五一})^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}}$

今有橢圜線、長徑十寸、短徑六寸、試求長徑端之曲率半徑若干、 答曰、三寸又十分寸之六、

今有橢圜線、長短徑同上、試求短徑端之曲率半徑若干、 答曰、十六寸又三分寸之二、

漸伸線

凡線附于曲體成曲線、漸漸展開、其端必行成螺線、其原曲線名曰漸伸線、



如圖、呷呐呐爲曲體、無論何曲體理俱同有線一端着呐點之下、而附于曲體成母曲線、乃拉緊呷端、漸漸展開、自呷展至呐、其端必行成呷吧吔吔、子曲線在一个平面內、子線爲何類、視母線類而異、子線爲母線漸伸所成、恆爲螺線、

漸伸線諸例

一、已離曲體吧吶一段為吶點之切線餘倣此

二、母線吶點之切線、為子線吧點之垂線、方展至吶時、吶點可當作圜心、吶吧切線為半徑、故吶吶吶三點、為吧吧吧三點曲率之心、吧吶吧吶吧吶三線、為吧吧吧三點之曲率半徑、

三、吧點之曲率半徑吧吶、等于母線之一段呷吶、設于子曲線呷吧吧吧諸點各作合吻圜、則其諸心必在母曲線呷吶吶吶諸點上、故母曲線之式、即子曲線無數合吻圜相聯屬之式、

平圓之公式爲

$(天丅甲)^{二}丄(地丅乙)^{二}=咊^{二}$

㈠、四卷三款甲與乙爲圜心之縱橫線、欲求漸伸線之式、當先求㈠式中甲乙相連屬之率、葢甲乙爲曲率圜心之縱橫線、卽母曲線之縱橫線也、已攷得曲率平圜之式爲

$地丅乙=丅\frac{彵^{二}}{伕^{二}丄彵^{二}}$

㈡

$天丅甲=丅\frac{伕}{彵}(地丅乙)$

㈢、本卷二款用此二同數、可令螺線式中天地二元消盡法以各螺線式二次求微分、得彵及彵之二同數、具

有甲乙天地四元、用于㊁㊂兩式中、則天地二元可消盡、所得式僅有甲乙二元、及諸常數、即爲漸伸線之式、

設題

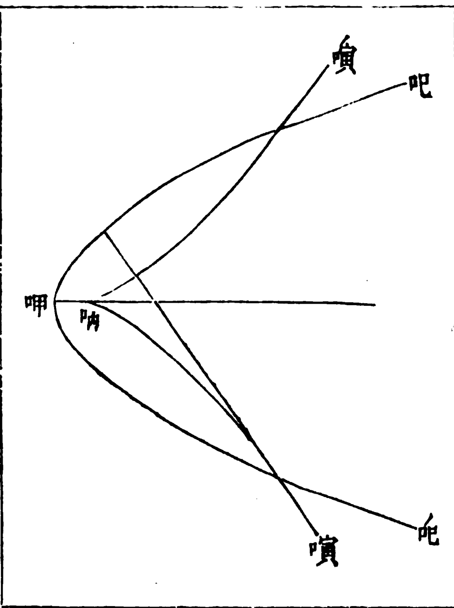
今有拋物線、求其漸伸線之式、

本螺線式爲$地^{二}=二巳天$、求微分得$\frac{彳天}{彳地}=\frac{地}{巳}$、故$彳地=\frac{地}{巳彳天}$、求二次微分得$彳彳地=丅\frac{地}{彳地^{二}}$、以$彳地^{二}$之同數代之、得$彳彳地=丅\frac{地^{三}}{巳^{二}彳天^{二}}$用此二同數于㊁㊂兩

式中、化得 $地丅乙=\frac{巳^{二}}{地^{三}}丄地$、故 $乙^{二}=\frac{巳^{四}}{地^{六}}$、又 $天丅甲=丅\frac{巳}{地}丅巳$、各以地之同數 $二巳天$ 代之、得

$乙^{二}=\frac{巳}{八天^{三}}$ $天丅甲=丅二天丅巳$、準末式得 $天=\frac{三}{甲丅巳}$、用此同數于上式中、得 $乙^{二}=\frac{二七}{八}\frac{巳}{(甲丅巳)^{三}}$、即漸

伸線式、別得爲半立方拋物線、八卷末條 若令 $乙=〇$、則得



$甲=巳$、故漸伸線與橫軸交點距原

點呷㖼、必等于通徑之半、若移

原點從呷至㖼、則上式變爲 $乙^{二}=\frac{二七巳}{八}甲^{三}$、

甲各同數中之乙、各有二同數

相等而正負不同、蓋以橫軸爲準、拋物線有二母線、一哂嗔、成螺線呷吧、一哂嗊、成螺線呷吧也、

擺線理

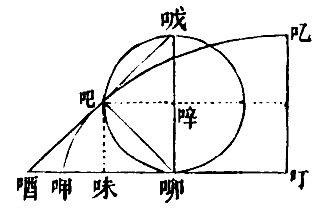
擺線之式爲

$$天=弧丅\sqrt{二未地丅地^{二}}、$$

地爲弧之正矢、九卷一款以此越線式求得兩邊之微分、用以求擺線之體用、法爲最便、備陳如左、

準前 $彳弧 = \frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{未彳地}$ 十三卷十款後論 $彳\left(丅\sqrt{二未地丅地}\right) = 丅\frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{未彳地丅地彳地}$、十卷十四款 故 $彳天 = \frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{未彳地} 丅 \frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{未彳地丅地彳地}$、即 $彳天 = \frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{地彳地}$、為擺線之微分式、

前切法諸線之式中、十四卷一款至四款用此彳天之同數、即得擺線切法諸線之同數如下、次切線式 $\frac{味}{唒} = 地\frac{彳地}{彳天} = \frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{地^{二}}$、切線



式

$$\text{吧哂}=\text{地}\sqrt{\text{一}\perp\frac{\text{彵}^{\text{二}}}{\text{伕}^{\text{二}}}}=\frac{\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{\text{二}}}}{\text{地}\sqrt{\text{二未地}}}$$

次法線式

$$\text{味唎}=\text{地}\frac{\text{伕}}{\text{彵}}=\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{\text{二}}}$$

法線式

$$\text{吧唎}=\text{地}\sqrt{\text{一}\perp\frac{\text{伕}^{\text{二}}}{\text{彵}^{\text{二}}}}=\sqrt{\text{二未地}}$$

次法線味唎、等于母輪中之正弦吧啐、皆等于 $\sqrt{\text{二味地}\top\text{地}^{\text{二}}}$ 故也、故法線吧唎與輪徑哦唎、交擺線底必在一點、

第四款　擺線各點之曲率半徑、恆等于倍法線、

置擺線之微分式 $\text{伕}=\frac{\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{\text{二}}}}{\text{地}}\text{彵}$、以伕為常數、再求微分、得下

式

$〇=(地\,彳彳地\,丄\,彳地^{二})\sqrt{二未地丅地^{二}}\,丅\,\frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{地\,彳地(未\,彳地\,丅\,地\,彳地)}$

去其分數而以地徧約之、得

$〇=(二未地丄地^{二})彳地丄未\,彳彳地$、

故

$彳彳地=丅\frac{二未地丅地^{二}}{未\,彳地^{二}}=丅\frac{地^{二}}{未伕^{二}}$

$彳地^{二}=\frac{地^{二}}{(二未地丅地)伕^{二}}$、

用此二同數于曲率半徑公式

$呹=\frac{伕\,彳彳地}{(伕^{二}丄彳地^{二})^{\frac{三}{二}}}$

中、本卷二款則化得

$呹=\frac{\frac{地^{二}}{未伕^{三}}}{\left(\frac{丄地}{二未伕}\right)^{\frac{三}{二}}}=二^{\frac{三}{二}}未^{\frac{三}{二}}地^{\frac{二}{三}}=二\sqrt{二未地}$、

別得 $\sqrt{二未地}$ 卽擺線之法線、上條與款合、

第五款　擺線之漸伸線等于本擺線

準前求漸伸線之式、當以本曲線式求彳地彳地之二同數、求法詳上款用于前㊁㊂兩式中、本卷漸伸線總論如法求得

$$\text{地}\,丅\,\text{乙}=丅\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}^{二}丄\text{彳地}^{二}}=\frac{\dfrac{\text{地}^{二}}{\text{禾彳天}^{二}}}{\text{彳天}^{二}丄\dfrac{\text{地}^{二}}{(二\text{禾地}丅\text{地}^{二})}\text{彳天}^{二}}$$

$$=\frac{\text{禾}}{\text{地}^{二}丄二\text{禾地}丅\text{地}^{二}}=二\text{地}、$$

所以

$$\text{地}=丅\text{乙}、$$

又

$$\text{天}丅\text{甲}=丅\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}(\text{地}丅\text{乙})$$

$$=丅\frac{\text{地}}{\sqrt{二\text{禾地}丅\text{地}^{二}}}\times二\text{地}=丅二\sqrt{二\text{禾地}丅\text{地}^{二}}、$$

所以

$$\text{天}=\text{甲}丅二\sqrt{二\text{禾地}丅\text{地}^{二}}、$$

用此天地二同數于擺線之式

$$\text{天}=\text{弧}丅\sqrt{二\text{禾地}丅\text{地}^{二}}$$

地為弧之正矢。十三卷十款後論中、則得下式

甲丁二√丁二未乙丁乙二＝弧丁√丁二未乙丁乙二、

丁乙為弧之正矢

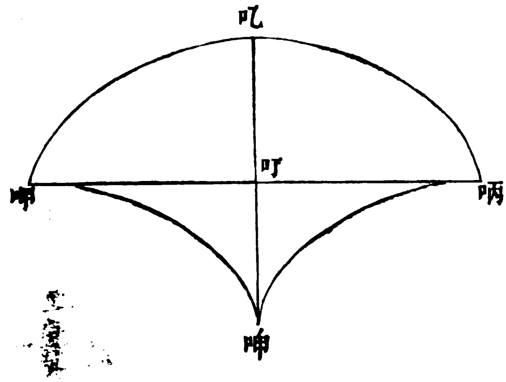
即

甲＝弧丄√丁二未乙丁乙二

此為以本擺線式中原點原軸為準之漸伸線式、弧不變、故可以丁乙代擺線式中之地、九卷一款即知此式之線亦為擺線、其母輪與本擺線同、而頂點切本擺線底線之端、母輪在底線之下、與款合、

如圖、擺線之漸伸線呷呻、為相等擺線、叱呷呷呻

二曲線等、但頂點自叱移至呷、



代微積拾級卷十六

米利堅羅密士譔
英國 偉烈亞力 口譯
海寧 李善蘭 筆述

微分七

論一切曲線中諸理

凡曲線無論若干次、若可用代數幾何術中諸式表之、即俱可推、法以自變之元、用若干正負同數、即可任定曲線內之若干點、

用微分攷諸式、不獨甚易、且曲線式之次數甚多、不

能以此變數而得彼變數之公式、而微分獨能推之、攷察曲線之理、最先當求曲線內諸獨異點、如切線與橫軸平行之點、切線與橫軸正交之點、凡此之類、俱名獨異點、獨異者、言與相近諸點不相同也、

第一款　凡曲線內切線與橫軸平行之點、其式之第一次微係數等于○、

第一次微係數等于切線與橫軸交角之正切、十二卷一款今切線與橫軸平行、則交角為○、故正切亦為○、

第二款　凡曲線內切線與橫軸正交之點、其式之第一次微係數等于無窮、第一次微係數等于切線與橫軸交角之正切、今交角為九十度、故正切為無窮、

設題

試求平圜周、何點之切線與橫軸平行、何點之切線正交橫軸、

平圜之式為 $\text{天}^{二}\,\text{丄}\,\text{地}^{二}=\text{味}^{二}$、求微分得 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{丅}\frac{\text{地}}{\text{天}}$、此數等于〇、則天等

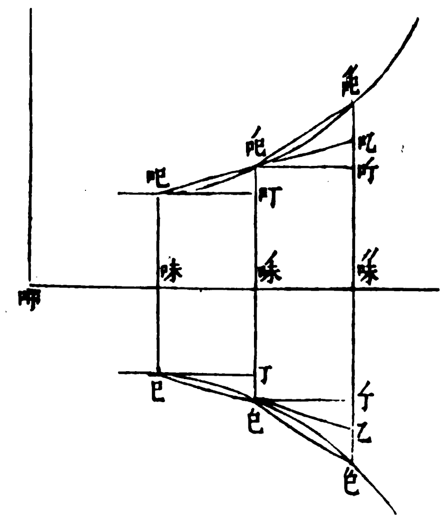
于〇、惟天=〇則地=亠味故切線與橫軸平行、必在圜周交縱軸之二點、若$\frac{彳天}{彳地}=丅\frac{地}{天}=\infty$即$丅\frac{天}{地}=〇$、則地等于〇、惟地=〇則天=亠味故切線正交橫軸、必在圜周交橫軸二點、正交、

試求擺線、何點之切線與底平行、何點之切線與底正交、

答曰、切線與底平行、必在頂點、切線與底正交、必在擺線遇底之二點、

第三款　凡曲線以凸邊向橫軸、則縱線與第二次微係數必同號、

如圖、吧咆咆曲線以凸邊向橫軸、命吧點之縱橫



線爲天地、任取長數味咊、命爲辛、加于天、又取咊咊等于辛、作咆味吧咊二縱線、作吧咆咆線、引長之至叺、亦作咆咆線、又作吧叮咆叮、各與呷味平行、則得

$$\frac{\text{吧}}{\text{味}}=\text{地}$$

$$\frac{\text{咆}}{\text{味}}=\text{地}\perp\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛}\perp\frac{\text{彳天}^{\text{二}}\ \text{二}}{\text{彳地}\ \text{辛}^{\text{二}}}\perp\cdots\cdots$$

㊀

$$\frac{\text{咆}}{\text{咊}}=\text{地}\perp\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{二辛}\perp\frac{\text{彳天}^{\text{二}}\ \text{二}}{\text{彳地四辛}^{\text{二}}}\perp\cdots\cdots$$

㊁、故

$$\frac{\text{咆}}{\text{叮}}=\frac{\text{咆}}{\text{咊}}\top\frac{\text{吧}}{\text{味}}=\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛}\perp\frac{\text{彳天}^{\text{二}}\ \text{二}}{\text{彳地}\ \text{辛}^{\text{二}}}\perp\cdots\cdots$$

㊂、以㊀式減

㊁式、得

$$\frac{\text{吔}''}{\text{吋}} = \frac{\text{吔}''}{\text{咊}''} \top \frac{\text{吔}}{\text{咊}''} = \frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛} \perp \frac{\text{彳天}^{二}\quad 二}{\text{彳地}\,\text{辛}^{二}} \perp \cdot$$

㊃、惟吃吋等于吔叮、故以㊂式減㊃式、得

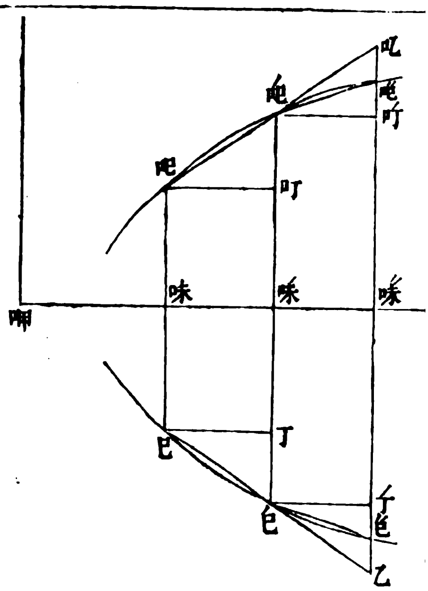
$$\frac{\text{吔}}{\text{吃}} = \frac{\text{吔}}{\text{吋}} \top \frac{\text{吔}}{\text{叮}} = \frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳地}}\text{辛}^{二} \perp \cdots$$

㊄、辛無論大小、㊄式右邊之號、必以左邊之號為準、其左邊為正、則右邊亦必為正、即第二次微係數為正、而縱線在橫軸之上、亦必為正、若曲

線在橫軸之下、則得 $\top\frac{白}{乙}=\frac{白}{子}\top\frac{白}{丁}=\frac{彳天^{二}}{彳地}辛^{二}\bot\cdots\cdots$ 此式左邊爲負、則右邊亦必爲負、卽第二次微係數爲負、而縱線在橫軸之下、亦必爲負、俱與款合、

第四款　凡曲線以凹邊向橫軸、則縱線與第二次微係數必異號、

如圖、吧吧吧曲線、以凹邊向橫軸、命吧點之縱橫線爲天地、任取長數味味、命爲辛、加于天、又取味



咪、等于辛、作吧味吧咪二縱線、作吧吧、引長之至吃、亦作吧吧、又作吧叮吧吖、俱與呷味平行、則得左式、

$$\frac{吧}{味}=地$$

$$\frac{吧'}{咪}=地丄\frac{彳天}{彳地}辛丄\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}\frac{辛^{二}}{二}丄\cdots\cdots$$

（一）

$$\frac{吧''}{咪''}=地丄\frac{彳天}{彳地}二辛丄\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}\frac{四辛^{二}}{二}丄\cdots\cdots$$

（二）、

故

$$\frac{吧'}{叮}=\frac{吧'}{咪'}丅\frac{吧}{味}=\frac{彳天}{彳地}辛丄\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}\frac{辛^{二}}{二}丄\cdots\cdots$$

（三）、以（一）式減（二）式、得

$$\frac{吧''}{吖}=\frac{吧''}{咪''}丅\frac{吧'}{咪'}=\frac{彳天}{彳地}辛丄\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}\frac{三辛^{二}}{二}丄\cdots\cdots$$

（四）、惟吃吖等于吧叮、故以（三）式減（四）式、得

$$丅\frac{吧''}{吃}=\frac{吧''}{吖}丅\frac{吧'}{叮}=\frac{彳天^{二}}{彳地^{二}}辛^{二}丄\cdots\cdots$$

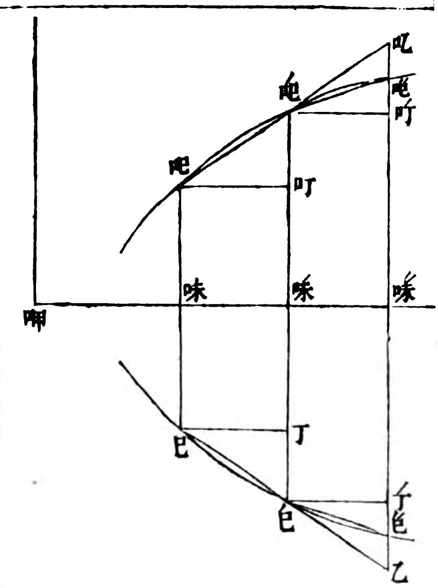
（五）、式之左邊

旣爲負、則右邊亦必爲負、卽第二次微係數爲負、而縱線在橫軸之上爲正、若曲線在橫軸之下、則得$\perp\frac{\text{己}}{\text{乙}}=\frac{\text{己}}{\text{子}}\top\frac{\text{己}}{\text{丁}}=\frac{\text{伏}^{二}}{\text{微地}^{二}}\text{辛}^{二}\perp\cdots\cdots$、此式二次微係數爲正、而縱線爲負、俱與款合、

設題

試求平圜周線向橫軸之邊、爲凹爲凸、

平圜之式爲$\text{天}^{二}\perp\text{地}^{二}=\text{味}^{二}$、求微分得$\frac{\text{伏}}{\text{微地}}=\top\frac{\text{地}}{\text{天}}$、又$\frac{\text{伏}^{二}}{\text{微地}^{二}}=\top\frac{\text{地}^{二}}{\text{天}^{三}\perp\text{地}^{三}}=\top\frac{\text{地}^{三}}{\text{味}^{三}}$、若地爲正、此



味″、等于辛、作吧′味′吧″味″二縱線、作吧吧′、引長之至吃、亦作吧′吧″、又作吧叮吧′叮″、俱與呷味平行、則得左式、

$$\frac{吧}{味}=地$$

$$\frac{吧′}{味′}=地\perp\frac{彳天}{彳地}辛\perp\frac{彳天^{二}\ 二}{彳地辛^{二}}\perp\cdots$$

㊀

$$\frac{吧″}{味″}=地\perp\frac{彳天}{彳地}二辛\perp\frac{彳天^{二}\ 二}{彳地四辛^{二}}\perp\cdots$$

㊁、故

$$\frac{吧′}{叮}=\frac{吧′}{味′}\top\frac{吧}{味}=\frac{彳天}{彳地}辛\perp\frac{彳天^{二}\ 二}{彳地辛^{二}}\perp\cdots$$

㊂、以㊀式減㊁式、得

$$\frac{吧″}{叮′}=\frac{吧″}{味″}\top\frac{吧′}{味′}=\frac{彳天}{彳地}辛\perp\frac{彳天^{二}\ 二}{彳地三辛^{二}}\perp\cdots$$

㊃、惟吃叮″等于吧叮、故以㊂式減㊃式、得

$$\top\frac{吧″}{吃}=\frac{吧″}{叮″}\top\frac{吧′}{叮}=\frac{彳天^{二}}{彳地}辛^{二}\perp\cdots$$

㊄、式之左邊

既爲負、則右邊亦必爲負、卽第二次微係數爲負、而縱線在橫軸之上爲正、若曲線在橫軸之下、則得 $\perp\frac{巳}{乙}=\frac{巳}{丁}\top\frac{巳}{丅}=\frac{彳^{2}天}{彳地^{2}}辛^{2}\perp\cdots$、此式二次微係數爲正、而縱線爲負、俱與款合、

設題

試求平圜周線向橫軸之邊、爲凹爲凸、

平圜之式爲 $天^{2}\perp地^{2}=味^{2}$、求微分得 $\frac{彳天}{彳地}=\top\frac{地}{天}$、又 $\frac{彳^{2}天}{彳地^{2}}=\top\frac{地^{3}}{天^{2}\perp地^{2}}=\top\frac{地^{3}}{味^{2}}$、若地爲正、此

式爲負、若地爲負、此式爲正、故圜周向橫軸之邊爲凹、

曲線向橫軸之邊、或本爲凹、變爲凸、或本爲凸、變爲凹、恰當凹凸交界之點、名彎點、

第五款　凡彎點式之二次微係數、或爲〇、或爲無窮、

凡曲線向橫軸之邊爲凸、則縱線與二次微係數同號、爲凹、則異號、彎點當凹凸之交界、則二次微係數至此必易號、故式之正負諸同數中間、必有

一同數或爲〇或爲無窮、所以視式之滅數爲$\frac{彳天^{二}}{彳地}=〇$或$\frac{彳天^{二}}{彳地}=\infty$、卽得彎點之橫線、

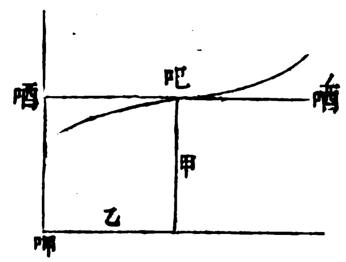
已求得曲線內一點之二次微係數、或等于〇或等于無窮、乃以稍長數辛、增損此點之橫線、而視其二次微係數、若兩新同數異號、則必有彎點、

設題

今有$地=甲丄(天丅乙)^{三}$、試求其式有彎點否、

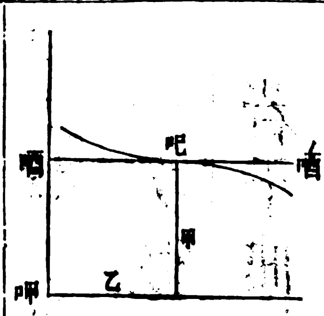
此式求微分、得$\frac{彳天}{彳地}=三(天丅乙)^{二}$、再求微分、得$\frac{彳天^{二}}{彳地}=六(天丅乙)$、若$天=乙$、則二次微

係數爲○、而切線在 天=乙 地=甲 之點上、與橫軸平行、若 天<乙、則二次微係數爲負、若 天>乙、則二次微係數爲正、故曲線內 天=乙 之點、二次微係數至此必易號、而此點必爲彎點、



如圖、哂唒爲切線、吧點之左、曲線在切線下、吧點之右、曲線在切線上、吧卽彎點、

今有 $地=甲(天-乙)^{三}$ 試求其式有彎點否、



答曰、曲線向橫軸之邊、初為凸、後為凹、故天＝乙之點為彎點、

令有地＝三天⊥一八天^{二}丅二天^{三}、試求其式有彎點否、

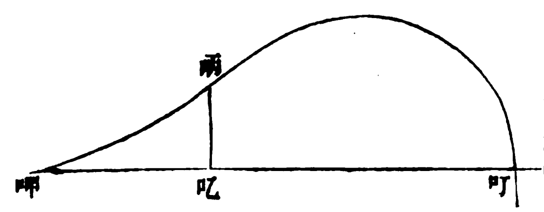
此式求微分、得$\frac{彳天}{彳地}$＝三⊥三六天丅六天^{二}、再求微分、得$\frac{彳天^{二}}{彳地}$＝三六丅一二天、令等于〇、則得

天=三故取呷𠮙=三作縱線𠮙𠰳則𠰳爲彎點、若天

在〇與三之間、則三六丅一二天爲正、故曲線呷𠰳一

段向呷𠮙爲凸、若天>三、則三六丅一二天爲負、故曲線𠰳

點之右、向𠮙叮爲凹、



若干曲線相交于一點、其交點名倍點、

第六款　凡倍點之一次微係數、必有幾个同數、

一次微係數等于切線交横軸角之正切、十二卷一款

若干曲線相交、必有若干切線、故微係數有若干

同數、

凡倍點之一次微係數、大率爲$\frac{〇}{〇}$、顯未定之數也。

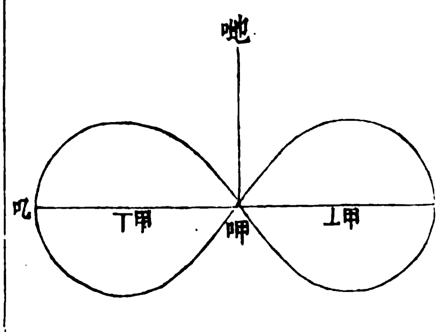
設題

今有 $地^{二}=甲^{二}天^{二}-天^{四}$、試求其式有倍點否、

此式之左右各開方、得 $地=\pm天(甲^{二}-天^{二})^{\frac{一}{二}}$ ㈠、求微分、得 $\frac{彳天}{彳地}=\pm\frac{(甲^{二}-天^{二})^{\frac{一}{二}}}{甲^{二}-二天^{二}}$ ㈡、式之

一次微係數有正負二同數、卽知有二曲線相交、

向橫軸之勢相似、若㈠式中 $天=\pm甲$、則 $地=〇$、故曲線交橫



軸于吃呬二點距原點一爲丄甲、一爲丅甲、又若天=○、則地=○、故曲線交點在原點呷、呷即爲倍點、若㈡式中天=○、則式變爲$\frac{彳地}{彳天}=\pm甲$、故呷點有二切線、一與橫軸交角之正切爲丄甲、一與橫軸交角之正切爲丅甲、

今有$地^{2}=(天-甲)^{2}(天-乙)$、試求其式有倍點否、

答曰、天=甲 地=○之點、爲倍點、

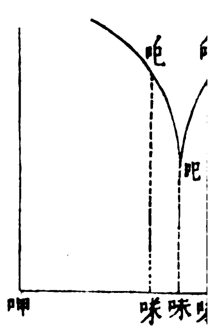
凡若干曲線有公切線之點、名歧點、曲線在切線之

一邊曰一邊歧點、在兩邊曰兩邊歧點、

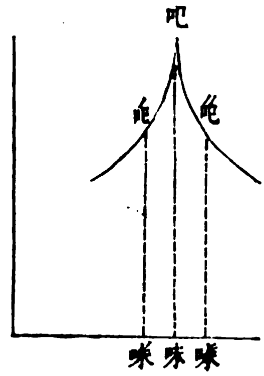
縱橫軸可任意作之、故下二款設歧點之切線爲橫軸之垂線、若切線與橫軸平行、則橫線與縱線互易、

第七款　令曲線歧點之切線、爲橫軸之垂線、若其兩邊相近之縱線、或俱大于本點之縱線、或俱小于本點之縱線、則爲兩邊歧點、

如圖、吧爲曲線之歧點、其切線吧味、爲橫軸呷呋之垂線、吧味、吧″味″二縱線、甚近于吧味、各大于吧



點、若吧咊吧咊各小于吧咊吧亦必為公切線與二曲線相切點、若此者、



吧皆為兩邊歧點、觀前後二圖自明、

設題

今有$\text{地}=\text{甲}丄\text{二}(\text{天}丅\text{乙})^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}$、求式之曲線、有兩邊歧點否、

此式求微分、得$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{\text{三}(\text{天}丅\text{乙})^{\frac{\text{三}}{\text{一}}}}{\text{四}}$、若$\text{天}=\text{乙}$、此微係數為無窮、卽切線與橫軸交角之正切為無窮、十二卷一款故切線必為$\text{天}=\text{乙}$ $\text{地}=\text{甲}$之點上橫軸垂線、乃用$\text{乙}丅\text{辛}$及$\text{乙}丄\text{辛}$各代本式中之天、俱得$\text{地}=\text{甲}丄\text{二}\text{辛}^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}$、則$\text{天}=\text{乙}$時地之同數為最小、此外無論天大于乙天小于乙、地之同數恆大于此同數、是

天=乙
地=甲

之點、必爲兩邊歧點

今有地=甲丅二(天丅乙)^{三}、求式之曲線、有兩邊歧點否、

本式中若用乙丄辛及乙丅辛以次代天、俱得地=甲丅二辛^{三}、所以天=乙、地之同數爲最大、此外無論天大于乙天小于乙、地之同數皆小于此同數、是

天=乙
地=甲

之點、爲兩邊歧點、

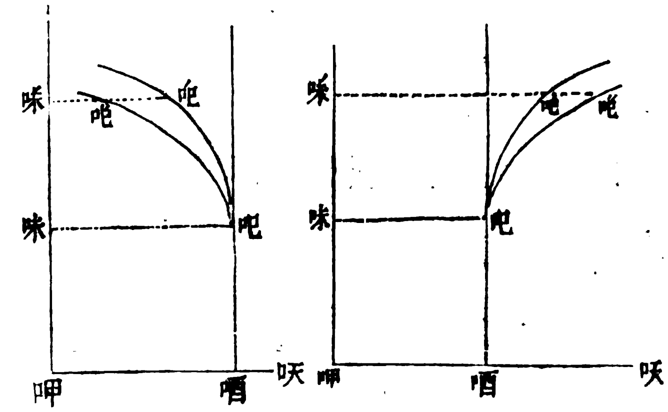
今有天^{二}=地^{三}求式之曲線、有兩邊歧點否、

答曰

天=〇
地=〇

之點、爲兩邊歧點、此式歧點在原點、

第八款　令曲線歧點之切線爲橫軸之垂線、若其一邊相近之橫線有二同數、或俱大于本點之橫線、或俱小于本點之橫線、則爲一邊歧點、



如圖、吧爲曲線之歧點、其切線吧哂爲橫軸呷呋之垂線、其橫線吧味、設相近之橫線有二同數吧味″吧味、俱大于吧味、則吧必爲公切線與二曲線相切之點、若吧味吧味俱小于吧味、吧亦必爲公切線與二曲線相切

設題

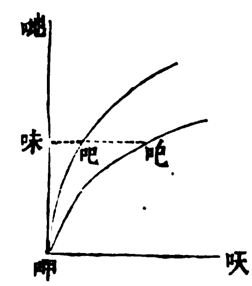
今有 $天＝地^{二}\pm地^{\frac{二}{五}}$、求式之曲線有一邊歧點否、

此式天有二同數、則有二曲線、求微分得 $\frac{彳天}{彳地}＝\frac{二地\pm\frac{二}{五}地^{\frac{二}{三}}}{一}$、若 $地＝〇$、

則 $天＝〇$、而一次微係數為無窮、故二曲線俱過原點、

縱軸即公切線、若地為負、則天為虛、所以曲線不

至橫軸之下、若 $地＝\perp辛$ 則 $天＝辛^{二}\pm辛^{\frac{二}{五}}$、設辛小于一、則 $辛^{\frac{二}{五}}$ 小于 $辛^{二}$



而天有二正同數、一吧味、一吔味、故呷爲一邊歧點、

設公切線爲二軸之斜線、同法攷之、歧點亦可定、

有點與曲線之諸點不相連、而其縱橫線與曲線之式合、名特點、

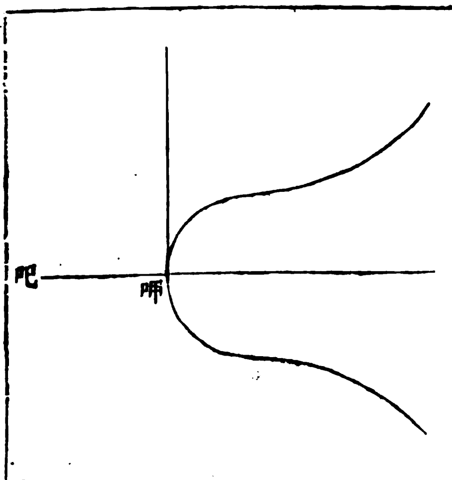
第九款　特點之一次微係數、恆等于虛常數、

特點與曲線之諸點不相連、則本點不能有切線、故一次微係數必爲虛數、

設題

今有 $\text{地}^{\text{二}}=\text{天}(\text{甲}\perp\text{天})^{\text{二}}$、求式之曲線、有特點否、

此式開平方、得 $\text{地}=\pm(\text{甲}\perp\text{天})\sqrt{\text{天}}$、故天若爲負、則地爲虛、又若 $\text{天}=0$、



則 $\text{地}=0$ 故曲線過原點呷、又天若爲正、地必有二實同數、故有二曲線、一在横軸上、一在横軸下、自原點起、俱向右邊行、又若 $\text{天}=\top\text{甲}$ 則 $\text{地}=0$ 故吧點之横線

爲甲丁、此點與曲線之他點不相連、而式亦合、卽特點也、

觀上諸款、則知依式作曲線圖、當先求諸獨異點、法令天與地等于〇等于無窮、又令一次二次微係數等于〇等于無窮、卽得諸獨異點、諸點中若有可疑者、則略增損本縱橫線之一、驗其所得餘一線若何、卽可定矣、諸獨異點既定、點之相近曲線狀亦既定、卽可任置天地之同數、曲線之餘點俱可得、而作曲線易易矣、

代微積拾級 積

Algebraic Geometry.

3

代微積拾級卷十七

米利堅羅密士譔　英國　偉烈亞力　口譯

海寧　李善蘭　筆述

積分一

總論

積分爲微分之還原、其法之要在識別微分所由生之函數、如已得天二之微分爲二天彳、則有二天彳、即知所由生之函數爲天二、而天二即爲積分、已得微分所由生之函數爲積分、而積分或有常數

附之或無常數附之既不能定故式中恒附以常數命爲呐、呐或有同數、或爲○、須攷題乃知、

來本之視微分若函數諸小較之一、諸小較并之卽成函數、故微分之左係一禾字、指欲取諸微分之積分也、如下式

禾二天彳天＝天^{二}丄呐、

來氏說、今西國天算家大率不用、而惟用此禾字、取其一覽了然也、

微係數顯函數與自變數二變之比例、故有微分求積分爲已有平變數、又有與他數同變之比例、乃準

平變數及另設數、求他數之同數、

如有 $彳戊=三天^{二}彳天$、求積分、已有平變數天、又有與他數戊同變之比例、求戊之同數、別得 $禾三天^{二}彳天=天^{三}$、故 $戊=天^{三}\perp丙$ 乃準天及另設數丙、即可得戊之同數也、

設題

今有平變數天、其變與他數變二率之比例、若一與 $甲天^{二}$ 之比例、令 $甲=九$ $天=一〇$ 求他數之同數、

命所求數爲戊、則有比例 $\text{彳天}:\text{彳戊}::\text{一}:\text{甲天}^{\text{二}}$、故 $\text{彳戊}=\text{甲天}^{\text{二}}\text{彳天}$ $\text{禾彳戊}=\text{禾甲天}^{\text{二}}\text{彳天}$、即 $\text{戊}=\frac{\text{甲天}^{\text{三}}}{\text{三}}$、則所求數爲 $\frac{\text{九}}{\text{三}}\times\text{一〇}^{\text{三}}=\text{三〇〇〇}$

論各微分之積分

變數乘常數、其微分等于常數乘變數微分、十卷五款則凡微分乘常數、其積分等于常數乘微分之積分、如 甲天 之微分爲 甲彳天、則 $\text{禾甲彳天}=\text{甲天}=\text{甲禾彳天}$、故有款、

第一款　凡微分求積分之式、設有常數、可列于積號之外、如式

$禾甲乙天^{二}彳天=甲乙禾天^{二}彳天$、

多項函數之微分、等于諸項微分之和或較、十卷八款則多項微分式之積分、等于諸微分積分之和或較、如

$甲^{二}天^{二}丅二甲天^{三}丅天$

之微分為

$二甲^{二}天彳天丅六甲天^{二}彳天丅彳天$、

則

$禾(二甲^{二}天彳天丅六甲天^{二}彳天丅彳天)$

為

$甲^{二}天^{二}丅二甲天^{三}丅天$、

故有款、

第二款　凡有若干微分之和或較、其積分等于各微分積分之和或較、

常數之項雜于變數項之間、無論正負、求微分時不用、十卷六款、如戊⊥丙之微分、與戊之微分無異也、則若有諸積分式變數俱同、惟常數不同、其在微分必無異、故有款、

第三款　凡微分求積分、得式後恆加一常數、如

式　禾彳戊＝戊⊥丙

凡$\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\text{一}}$之微分爲$(\text{寅}\text{丄}\text{一})\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}$、十卷十二款則$\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}=\frac{\text{寅}\text{丄}\text{一}}{\text{彳天}^{\text{寅}\text{丄}\text{一}}}=\text{彳}\left(\frac{\text{寅}\text{丄}\text{一}}{\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\text{一}}}\right)$、所以微分爲$\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}$、其積分爲$\frac{\text{寅}\text{丄}\text{一}}{\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\text{一}}}$即$\text{禾}\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}=\frac{\text{寅}\text{丄}\text{一}}{\text{天}^{\text{寅}\text{丄}\text{一}}}\text{丄}\text{丙}$故有款

第四款　凡一項微分如$\text{天}^{\text{寅}}\text{彳天}$之類、求積分法、置原式、以一加其指數爲實、以新指數乘變數之微分爲法、法約實、即得、

設題

今有自變數天、其變與他數變二率之比、若一與$\frac{乙}{甲}天^{二}$之比、求他數之同數式若何、 答式$\frac{三乙}{甲天^{三}}丄丙$

今有$\frac{三}{天^{二}彳天}$、求其積分若干、 答式$\frac{九}{天^{三}}丄丙$

今有$天^{\frac{三}{一}}彳天$、求其積分若干、 答式$\frac{四}{三}天^{\frac{三}{四}}丄丙$

今有$\frac{\sqrt{天}}{彳天}$卽$天^{丅\frac{二}{一}}彳天$、求其積分若干、 答式$二天^{\frac{二}{一}}丄丙$

今有$\frac{天^{三}}{彳天}$卽$天^{丅三}彳天$、求其積分若干、 答式$丅\frac{二}{天^{丅二}}$卽$丅\frac{二天^{二}}{一}丄丙$

今有$甲天^{二}彳天丄\frac{二\sqrt{天}}{彳天}$、求其積分若干、 答式$\frac{三}{甲天^{三}}丄天^{\frac{三}{二}}丄丙$

今有正方形、其邊平變大、每秒增十分寸之一、當面

積一秒中變大比例爲一方寸時、求其面積若干、

答曰二十五方寸、

準四款例若 $寅＝丅一$、則不合、葢依例得 $禾天^{丅一}彳天＝\frac{丅一丄一}{天^{丅一丄一}}$、卽 $\frac{〇}{天^{〇}}$、卽 $\frac{〇}{一}$、卽 $\propto$、

是不合也、今別得 $天^{丅一}彳天$、卽 $\frac{天}{彳天}$、此式爲天之對數微分、

卷三所以 $禾天^{丅一}彳天$、卽 $禾\frac{天}{彳天}＝天對丄呐$、又 $禾\frac{天}{甲彳天}＝甲天對丄呐$、故有款、

第五款 凡分子爲常數乘分母之微分、則其積分

爲常數乘分母之訥氏對數、

設題

今有$\frac{甲\perp天}{彳天}$、求其積分若干、答式$(甲\perp天)對\perp口丙$。

今有$\frac{甲\perp乙天^{二}}{二乙天彳天}$、求其積分若干、答式$(甲\perp乙天^{二})對\perp口丙$

今有$\frac{乙天}{甲彳天}$、求其積分若干、答式$甲(乙天對)\perp口丙$

今有$\frac{天^{三}}{甲天^{二}彳天}$、求其積分若干、答式$甲\frac{三}{天^{三}對}\perp口丙$

第六款　凡多項式如$(甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp\cdots)^{卯}彳天$之類、設卯為正整數、求其

積分、以括弧中之數自乘$卯丅一$次、所得各項、以彳天乘之、各求其積分、并之卽得、

觀本卷二款、其理自明、

設題

今有$(甲丄乙天)^{二}彳天$、求其積分若干、

法以括弧中之數自乘、所得各項、俱以彳天乘之、得$甲^{二}彳天丄二甲乙天彳天丄乙^{二}天^{二}彳天$、各求其積分、得$甲^{二}天丄甲乙天^{二}丄\frac{三}{乙^{二}天^{三}}丄⿰口丙$、卽積分也、

若多項式之指數爲分數亦與款合如後諸題

今有$(天⊥甲天)^{\frac{二}{一}}(彳天⊥甲彳天)$、求其積分若干　答式$\frac{三}{二}(天⊥甲天)^{\frac{二}{三}}⊥丙$

今有$\frac{(一⊥天)^{\frac{二}{一}}}{彳天}$、求其積分若干、　答式$\frac{三}{二}(一⊥天)^{\frac{二}{三}}⊥丙$

今有$(甲天^{二}⊥乙天^{三})^{\frac{二}{一}}(二甲天⊥三乙天^{二})彳天$、求其積分若干、　答式$\frac{三}{(甲天^{二}⊥乙天^{三})^{\frac{二}{三}}}⊥丙$

今有$(甲天⊥乙天^{二})^{\frac{三}{一}}(甲⊥二乙天)彳天$、求其積分若干、　答式$\frac{四}{三}(甲天⊥乙天^{二})^{\frac{三}{四}}⊥丙$

凡合名之微分式、如

$$彳戊=(甲\perp乙天^{卯})^{寅}天^{卯丁一}彳天$$

之類、其括弧外變數之指數、較括弧內變數之指數少一、則可推廣上款例求其積分、如

$$地=甲\perp乙天^{卯}、$$

則

$$彳地=乙卯天^{卯丁一}彳天、$$

即

$$\frac{乙卯}{彳地}=天^{卯丁一}彳天、$$

故

$$彳戊=地^{寅}\frac{乙卯}{彳地}$$

$$戊=\frac{(寅\perp一)乙卯}{地^{寅\perp一}}\perp丙、$$

即

$$戊=\frac{(寅\perp一)乙卯}{(甲\perp乙天^{卯})^{寅\perp一}}\perp丙、$$

故有款、

第八款　凡有合名微分、若括弧外變數之指數、較括弧內變數之指數少一、求積分、取合名數、以一

加其指數爲實以新指數乘括弧內變數之指數、復以係數乘之爲法、法約實卽得、

設題

今有 $彳戊=(甲丄三天)^{三}彳天$ 求其積分若干、

法置 $地=甲丄三天^{二}$、則 $彳地=六天彳天$、卽 $彳天=\frac{六}{彳地}$ 故 $彳戊=\frac{六}{地^{三}彳地}$、而 $戊=\frac{二四}{地^{四}}=\frac{二四}{(甲丄三天^{二})^{四}}丄丙$

今有 $(甲丄乙天)^{寅}彳天$、求其積分若干、 答式 $\frac{三乙}{寅}(甲丄乙天)^{寅丄一}丄丙$

今有$\frac{\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}}{天彳天}$、求其積分若干、　答式$\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}丄㖍$

今有$(甲丄乙天)^{\frac{三}{二}}戊天彳天$、求其積分若干、　答式$\frac{五乙}{戊(甲丄乙天)^{\frac{三}{五}}}丄㖍$、

今有$(甲^{二}丄天^{卯})^{卯}甲卯天^{卯丅一}彳天$、求其積分若干、　答式$\frac{二}{甲(甲^{二}丄天^{卯})^{二}}丄㖍$、

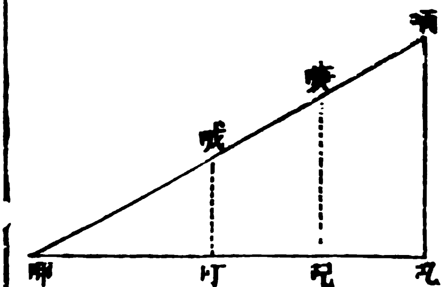
今有天元、每秒中增大一寸、其變率之比例為$\frac{\sqrt{二天丄天^{二}}}{一丄天}$、求其原式若何、　答式$\sqrt{二天丄天^{二}}丄㖍$

凡求積分、必加一常數㖍、若未知㖍為若干、則式中

之積數不能明爲未定之式故欲以積分式推題之確數、當依題所設、令變數同于〇、卽可得昞之同數、若變數與積數同時生、則天＝〇時、積數亦同于〇、故昞＝〇、是本無常數、故昞可消去也、又或天＝甲時、積數初生、則昞亦可攷定、如是、則昞之同數、或爲若干、或爲〇、俱可知、已知常數之同數、則變數可任置一同數、俱可知積數之同數、而其式爲已定之式、

設題

今有呷叱昞句股形、求面積有常數否、



命句爲天、股爲卯天、則面積爲二卯天二、其微分爲卯天彳、求卯天彳之積分、爲禾卯天彳＝二卯天二上呐、本卷四款、卽呷吃呐

句股形之面積、攷圖、句天及面積同起于呷點、故天＝○時、積數亦同于○、卽二卯天二上呐＝○、所以呐＝○、無常數也、

今有哎叮㖂吧二垂線間之四邊形哎叮吧㖂、用上圖求其面積有常數否、

法先求呷叮哦句股形之面積、設天等于呷叮、而命爲甲、命叮哦爲卯甲、則呷叮哦之面積爲三卯甲二丄呬、次求呷吧咦之面積、設天等于呷吧、而命爲乙、命吧咦爲卯乙、則呷吧咦之面積爲三卯乙二丄呬、以前式減後式、得哦叮吧咦四邊形之面積三卯乙二丅三卯甲二、無常數也、

故自變數連用二同數、求得相似大小二積數之較、則常數呬可消去、如上題、自變數先等于甲、後等于乙、以其二積數相減、取其較數是也、是謂求天＝甲天＝乙二

數之較積法、依此法作式、另有記號爲$\text{禾}_{\text{甲}}^{\text{乙}}$、如

$$\text{禾}_{\text{甲}}^{\text{乙}}\text{卯天彳天}=\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{卯乙}^{\text{二}}\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}\text{卯甲}^{\text{二}}$$

$$=\frac{\text{二}}{\text{卯}(\text{乙}^{\text{二}}\text{丅甲}^{\text{二}})}$$

設題

今有$\text{禾}_{\text{甲}}^{\text{乙}}\text{二天彳天}$、求其積分、且作式明之、

此式之積分爲$\text{天}^{\text{二}}\text{丄丙}$、若$\text{天}=\text{甲}$、則得$\text{甲}^{\text{二}}\text{丄丙}$、若$\text{天}=\text{乙}$、則得$\text{乙}^{\text{二}}\text{丄丙}$、以前減後、得$\text{乙}^{\text{二}}\text{丅甲}^{\text{二}}$、卽積分也、

今有$\text{禾}_{\text{甲}}^{\text{乙}}\text{三天彳天}$、求其積分、且作式明之、若$\text{甲}=\text{四}$、$\text{乙}=\text{六}$、其同數若干、

此式之積分爲$天^{三}\perp丙$、$天=甲$則爲$甲^{三}\perp丙$、$天=乙$則爲$乙^{三}\perp丙$、相減得$乙^{三}\top甲^{三}$、若$甲=四$、$乙=六$、則得$二一六\top六四$、等于$一五二$、即積分之同數也、

今有$禾_{甲}^{乙}\frac{周天}{二}彳天$、求其積分、且作式明之、若$甲=二$、$乙=三$、其同數若干、

此式之積分爲$\frac{周天^{二}}{四}\perp丙$、若$天=二$、則得$周\perp丙$、若$天=三$、則得$\frac{九周}{四}\perp丙$、相減、得$\frac{五周}{四}$、即積分之同數也、

今有$禾_{甲}^{乙}\frac{周天^{二}}{二}彳天$、求其積分、且作式明之、若$甲=四$、$乙=六$、其同數若干、

此式之積分爲$\frac{周天^{三}}{六}\perp丙$、若$天=四$、則得$\frac{六四周}{六}\perp丙$、若$天=六$、則得$三六周\perp丙$、相減、得$\left(三六\top\frac{六四}{六}\right)周=\frac{一五二周}{六}$、即積分之同數也、

今有禾$_{甲}^{乙}$二（戊丄天）彳天、若甲＝一〇　乙＝二〇　戊＝四、求此式之同數若干、并作式明之、

此式之積分為二戊天丄天^{二}丄呐、即八天丄天^{二}丄呐、若天＝一〇、則得八〇丄一〇〇丄呐、即一八〇丄呐、若天＝二〇則得一六〇丄四〇〇丄呐、即五六〇丄呐、相減、得五六〇丅一八〇、即三八〇、即式之同數也、

今有禾$_{甲}^{乙}$三（戊丄卯天）^{二}二卯天彳天、若天＝四　乙＝六　戊＝四　卯＝二、求式之同數若干、并作式明之、

此式之積分為$\frac{二}{三}(戊丄卯天^{二})^{二}丄丙$、即$\frac{二}{三}(四丄六天^{二})^{二}丄丙$、若天＝四、則得$\frac{二}{三}(四丄九六)^{二}丄丙$、即一五〇〇〇丄丙、若天＝六、則得$\frac{二}{三}(四丄二一六)^{二}丄丙$、即七二六〇〇丄丙、相減、得五七六〇〇、即式之同數也。

今有$禾_{甲}^{乙}\frac{戊丄天}{彳天}$、若甲＝二、乙＝三、戊＝四、求式之同數若干、

此式之積分為(戊丄天)對丄丙、即(四丄天)對丄丙、若天＝二、則得(六)對丄丙、若天＝三、則得(七)對丄丙、相減得(七)對丅(六)對、即$\left(\frac{六}{七}\right)$對、即式之同數也。

用級數求積分法

凡呹彳天類之式、以呹爲天之函數、其求積分、有時詳天之級數爲最便、蓋若係歛級數、卽可推得積分之密率也、法以彳天徧乘各級、乃如法各求其積分、旣得各積分、并之、卽所設式之積分、是謂用級數求積分法、

設題

今有$\frac{一丄天}{彳天}$、試求其積分、

準合名法、$\frac{一丄天}{一}$卽

$$(一丄天)^{丅一}＝一丅天丄天^{二}丅天^{三}丄天^{四}丅\cdots$$

以彳天徧乘之、得

$$\frac{一丄天}{彳天}＝彳天丅天彳天丄天^{二}彳天丅天^{三}彳天丄天^{四}彳天丅\cdots$$

每級各求積

分、得

$$\text{禾}\frac{\text{一丄天}}{\text{彳天}}=\text{天丅}\frac{\text{二}}{\text{天}^{\text{二}}}\text{丄}\frac{\text{三}}{\text{天}^{\text{三}}}\text{丅}\frac{\text{四}}{\text{天}^{\text{四}}}\text{丄}\frac{\text{五}}{\text{天}^{\text{五}}}\text{丄}\cdots\text{丄丙}$$

即積分也、

今有$\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{彳天}}$、試求其積分、

準合名法、得$\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{一}}$即

$$(\text{一丄天}^{\text{二}})^{\text{丅一}}=\text{一丅天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}}\text{丅天}^{\text{六}}\text{丄}\cdots$$、

故

$$\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{彳天}}=\text{彳天丅天}^{\text{二}}\text{彳天丄天}^{\text{四}}\text{彳天丅天}^{\text{六}}\text{彳天丄}\cdots$$、

而

$$\text{禾}\frac{\text{一丄天}^{\text{二}}}{\text{彳天}}=\text{天丅}\frac{\text{三}}{\text{天}^{\text{三}}}\text{丄}\frac{\text{五}}{\text{天}^{\text{五}}}\text{丅}\frac{\text{七}}{\text{天}^{\text{七}}}\text{丄}\cdots\text{丄丙}$$、

即積分也

今有$\frac{\text{甲}}{\text{甲}\,丄\,\text{天}}$彳天、試求其積分、

答式

$\frac{\text{甲}}{\text{天}}\,丄\,\frac{\text{二甲}^{二}}{\text{天}^{二}}\,丄\,\frac{\text{三甲}^{三}}{\text{天}^{三}}\,丄\,\frac{\text{四甲}^{四}}{\text{天}^{四}}\,丄\cdots\cdots丄\,$對天、

今有$\frac{(\text{甲}\,丄\,\text{天})^{二}}{\text{彳天}}$、試求其積分

答式

$\frac{\text{甲}^{二}}{\text{天}}\,丅\,\frac{\text{四甲}^{三}}{\text{天}^{二}}\,丄\,\frac{\text{九甲}^{四}}{\text{天}^{三}}\,丅\,\frac{\text{一六甲}^{五}}{\text{天}^{四}}\,丄\cdots\cdots丄\,$兩、

今有$\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}$、試求其積分、

答式

$天丄\frac{二}{一}\times\frac{三}{天^{三}}丄\frac{二\times四}{一\times三}\times\frac{五}{天^{五}}丄\frac{二\times四\times六}{一\times三\times五}\times\frac{七}{天^{七}}丄\cdots$

論弧線微分之積分

凡命弧為人、正弦為地、若半徑為一、則得$彳人=\frac{\sqrt{一丅地^{二}}}{彳地}$、十三卷十款後

論所以$禾\frac{\sqrt{一丅地^{二}}}{彳地}=人丄丙$、若從初度起、弧等于○、則正弦亦為○、故

$呞=〇$而全積分$禾\frac{\sqrt{一丅地^{二}}}{彳地}$等于正弦地之弧

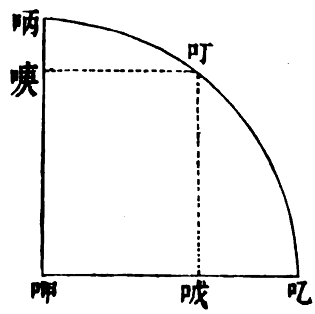
凡式如$彳人=\frac{\sqrt{甲^{二}丅地^{二}}}{彳地}$㊀、其積分可用助變數推之法、置$亥=\frac{甲}{地}$、卽$地=甲亥$、則$彳地=甲彳亥$、而$\sqrt{甲^{二}丅地^{二}}=甲\sqrt{一丅亥^{二}}$、用此二同數于㊀式中、則得$彳人=\frac{\sqrt{一丅亥^{二}}}{彳亥}$、故人等于正弦亥之弧、卽人等于正弦$\frac{甲}{地}$之弧、

設題

今有$彳人=\frac{\sqrt{四丅地^{二}}}{彳地}$、求其積分若干、

答曰人等于正弦三地之弧

若命餘弦為地、餘俱如前、則得$\text{彳人}=\frac{\sqrt{\text{一丅地}^{二}}}{\text{丅彳地}}$、十三卷十款後論故$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{一丅地}^{二}}}{\text{丅彳地}}=\text{人丄呐}$、設



弧從初度吃點起、滿一象限、則餘弦為○、弧為三周、故$\text{地}=○$、則式之左邊等于三周所以$\text{呐}=○$、而全積分$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{一丅地}^{二}}}{\text{丅彳地}}$等于餘弦地之弧、

凡式如$\text{彳人}=\frac{\sqrt{\text{甲}^{二}\text{丅地}^{二}}}{\text{丅彳地}}$、可如前用助變數求其積分、上條得人等于餘弦$\frac{\text{甲}}{\text{地}}$之弧、

凡命弧爲人、正切爲酉、則得 $彳人=\frac{一丄酉^{二}}{彳酉}$、十三卷十款後論所以 $禾\frac{一丄酉^{二}}{彳酉}=人丄丙$、若弧線從初度起 $人=〇$、則 $禾\frac{一丄酉}{彳酉}=〇$ 故 $丙=〇$ 而全積分 $禾\frac{一丄酉^{二}}{彳酉}$、等于正切酉之弧、

凡式如 $彳人=\frac{甲^{二}丄酉^{二}}{彳酉}$ ㊀、求積數、可用助變數推之法、置 $亥=\frac{甲}{酉}$、即 $酉=甲亥$、則 $彳酉=甲彳亥$、用此二同數于㊀式中、得 $彳人=\frac{甲^{二}丄甲^{二}亥^{二}}{甲彳亥}$、即 $彳人=\frac{甲}{一}\left(\frac{一丄亥^{二}}{彳亥}\right)$、故人等

于正切亥之弧以$\frac{甲}{二}$乘之卽人等于正切$\frac{甲}{酉}$之弧

以$\frac{甲}{二}$乘之、

凡命弧爲人、正矢爲天、則得$彳人=\frac{\sqrt{二天丅天^{二}}}{彳天}$、十三卷十款後論所以$禾\frac{\sqrt{二天丅天^{二}}}{彳天}=人丄呐$若

弧線從初度起、$人=○$、則、$禾\frac{\sqrt{二天丅天^{二}}}{彳天}=○$故$呐=○$、而全積分$禾\frac{\sqrt{二天丅天^{二}}}{彳天}$等于正矢

天之弧、

凡式如$彳人=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{彳天}$㊀、其積分可用助變數推之法置$亥=\frac{甲}{天}$、卽

$天=甲亥$、則 $彳天=甲彳亥$、用此二同數于一式中、則得 $彳人=\frac{\sqrt{二甲^2亥丅甲^2亥^2}}{甲彳亥}$、卽 $彳人=\frac{\sqrt{二亥丅亥^2}}{彳亥}$、故人等于正矢亥之弧、卽人等于正矢$\frac{甲}{天}$之弧、

論合名微分之積分

第九款　凡合名微分可化如下式 $天^{寅丅一}(甲丄乙天^{卯})^{壬}彳天$、其指數寅卯皆恆為整數、而卯卯恆為正、

一、設寅卯為分數、可以他變數代天、而以所設指

數諸母之最小公倍數為指數、則所化合名數、其式中變數之指數皆為整數、如$天^{\frac{一}{三}}(甲丄乙天^{\frac{一}{二}})^{\frac{一}{四}}彳天$、法令$天=人^{六}$、則式化為$人^{七}(甲丄乙人^{三})^{\frac{一}{四}}彳人$、其變數人之諸指數、皆為整數、

二、設卯為負數、如$天^{寅丅一}(甲丄乙天^{丅卯})^{\frac{一}{四}}彳天$法令$天=\frac{一}{人}$則式化為$人^{丅寅丄一}(甲丄乙人^{卯})^{\frac{一}{四}}彳人$、其括弧中變數之指數為整數、

三、設式之二項俱有變數天、如$天^{寅丅一}(甲天^{未}丄乙天^{卯})^{\frac{壬}{癸}}彳天$、法取括弧內之二項、俱以$天^{未}$約之、其外之乘數以$天^{\frac{壬}{癸未}}$乘之、得$天^{寅丄\frac{壬}{癸未}丅一}(甲丄乙天^{卯丅未})^{\frac{壬}{癸}}彳天$、則括弧內只一項有變數天、

第十款　凡合名微分、其括弧外之指數爲整正數、求積分法、以括弧內數、依此指數自乘若干次、得各項、以括弧外之乘數乘之、每項各求其積分、即

得、

觀第二款、卽明此款之理、

設題

今有$彳戊=天^{-二}(甲丄乙天^{-三})^{二}彳天$、求其積分

此式詳之得$彳戊=甲^{二}天^{-二}彳天丄二甲乙天^{-五}彳天丄乙^{二}天^{-八}彳天$、每項各求其積分、得$戊=\frac{三}{甲^{二}天^{三}}丄\frac{三}{甲乙天^{六}}丄\frac{九}{乙^{二}天^{九}}丄丙$、卽所求積

分也

今有 $\text{彳戊}=\text{天}^{\text{三}}(\text{甲}\,丄\,\text{乙天}^{\text{二}})^{\text{三}}\text{彳天}$、求其積分、

答式

$$\text{戊}=\frac{\text{四}}{\text{甲}^{\text{三}}\text{天}^{\text{四}}}\,丄\,\frac{\text{六}}{\text{三甲}^{\text{二}}\text{乙天}^{\text{六}}}\,丄\,\frac{\text{八}}{\text{三甲乙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{八}}}\,丄\,\frac{\text{一〇}}{\text{乙}^{\text{三}}\text{天}^{\text{一〇}}}\,丄\,\text{丙}$$

今有 $\text{彳戊}=\text{天}^{\text{四}}(\text{甲}\,丄\,\text{乙天}^{\text{三}})^{\text{三}}\text{彳天}$、求其積分

答式

$$\text{戊}=\frac{\text{五}}{\text{甲}^{\text{三}}\text{天}^{\text{五}}}\,丄\,\frac{\text{八}}{\text{三甲}^{\text{二}}\text{乙天}^{\text{八}}}\,丄\,\frac{\text{一一}}{\text{三甲乙}^{\text{二}}\text{天}^{\text{一一}}}\,丄\,\frac{\text{一四}}{\text{乙}^{\text{三}}\text{天}^{\text{一四}}}\,丄\,\text{丙}$$

今有

$$彳戊=天^{五}(甲\perp乙^{二}天^{四})^{三}彳天$$、

求其積分　答式

$$戊=\frac{六}{甲^{三}天^{六}}\perp\frac{一〇}{三甲^{二}乙^{二}天^{一〇}}\perp\frac{一四}{三甲乙^{四}天^{一四}}\perp\frac{一八}{乙^{六}天^{一八}}\perp丙$$

第十一款　凡合名微分若括弧外變數之指數加一、可以括弧內變數之指數約之、則可以他變元代括弧內之數、而以括弧外指數之母為指數、變式以求其積數、

如 $天^{寅丅一}(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{午}}彳天$ 寅可以卯約之、試令 $甲丄乙天^{卯}=人^{午}$、則 $(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{午}}=人^{巳}$ ㊀ 又 $天^{卯}=\frac{乙}{人^{午}丅甲}$、而 $天^{寅}=\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}}$、求微分得 $寅天^{寅丅一}彳天=\frac{卯乙}{寅午}人^{午丅一}\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}彳人$ ㊁、以㊀㊁兩式相乘、以寅約之、得 $天^{寅丅一}(甲丄乙天^{卯})^{\frac{巳}{午}}彳天=\frac{卯乙}{午}人^{巳丄午丅一}\left(\frac{乙}{人^{午}丅甲}\right)^{\frac{卯}{寅}丅一}彳人$、若 $\frac{卯}{寅}$ 為整正數、則依第十款卽可求得積分、若 $\frac{卯}{寅}$ 為負數、則依後叮術（本卷末條）增其指數、至于為正、卽亦

可求、

設題

今有 $彳地=天^{二}(甲丄乙天^{二})^{\frac{三}{二}}彳天$、求其積分、

令 $甲丅乙天^{二}=人^{二}$、則 $(甲丄乙天^{二})^{\frac{三}{二}}=人^{三}$ ㊀、$天^{二}=\frac{乙}{人^{二}丅甲}$ ㊁、$天彳天=\frac{乙}{人彳人}$ ㊂、以㊀㊁㊂三式相乘、得 $彳地=天^{四}(甲丄乙天^{二})^{\frac{三}{二}}彳天=人^{四}\frac{乙^{二}}{人^{二}丅甲}彳人$、

故$戊=\frac{七乙^{三}}{人^{七}}丅\frac{五乙^{三}}{甲人^{五}}⊥呐$、以人之原同數代之、得$戊=\frac{七乙^{三}}{(甲⊥乙天^{二})^{\frac{七}{二}}}丅\frac{五乙^{三}}{甲(甲⊥乙天^{二})^{\frac{五}{二}}}⊥呐$、即積分也、

今有$彳戊=天^{五}(甲⊥乙天^{二})^{\frac{三}{二}}彳天$、求其積分、

令$甲⊥乙天^{二}=人^{二}$、則$(甲⊥乙天^{二})^{\frac{一}{二}}=人$ 一、$天^{二}=\frac{乙}{人^{二}丅甲}$ 二、$天彳天=\frac{乙}{人彳人}$ 三、故$彳戊=\frac{乙^{三}}{人^{六}彳人丅二甲人^{四}彳人⊥甲^{二}人^{二}彳人}$、而$戊=\frac{七乙^{三}}{人^{七}}丅\frac{五乙^{三}}{二甲人^{五}}⊥\frac{三乙^{三}}{甲^{二}人^{三}}⊥呐$、以人之原同數

代之、得

$$戊=\frac{七乙^{三}}{(甲\perp乙天^{二})^{\frac{三}{七}}}\top\frac{五乙^{三}}{二甲(甲\perp乙天^{二})^{\frac{三}{五}}}\perp\frac{三乙^{二}}{甲^{二}(甲\perp乙天^{二})^{\frac{三}{三}}}\perp呐、$$

即積分也、

今有

$$彳戊=天^{五}(甲\perp乙天^{二})^{\frac{三}{一}}彳天、$$

求其積分、

令

$$甲⊥乙天^{二}=人^{二}$$、

則

$$(甲⊥乙天^{二})^{\frac{一}{二}}=人$$ ㊀、

$$天^{二}=\frac{乙}{人^{二}丅甲}$$ ㊁、

$$天彳天=\frac{二乙}{三人^{二}彳人}$$ ㊂、

故

$$彳戊=\frac{二乙^{三}}{三人^{一〇}彳人丅六甲人^{七}彳人⊥三甲^{二}人^{四}彳人}$$

而

$$戊=\frac{二二乙^{三}}{三人^{二二}}丅\frac{八乙^{三}}{三甲人^{八}}⊥\frac{一〇乙^{三}}{三甲^{二}人^{五}}⊥丙$$、

以人之原同數代之、得

$$戊=\frac{二二乙^{三}}{三(甲⊥乙天^{二})^{\frac{二二}{二}}}丅\frac{八乙^{三}}{三甲(甲⊥乙天^{二})^{\frac{八}{二}}}⊥\frac{一〇乙^{三}}{三甲^{二}(甲⊥乙天^{二})^{\frac{五}{二}}}⊥丙$$、

卽積分也、

今有$彳戊=天^{三}(甲丅天^{三})^{丅三}彳天$、求其積分

令$甲丅天^{二}=人$、則得$彳戊=丅(甲丅人^{三})彳人$、而$戊=丅甲人丄\frac{三}{人^{三}}丄丙$、即$戊=丅甲(甲丅天^{二})^{三}丄\frac{三}{(甲丅天^{二})^{三}}丄丙$、乃積分也、

今有$彳戊=天^{二}(甲丄天^{三})^{丅一}彳天$、求其積分、

令

$$人=甲^{二}丄天^{二}$$、

則得

$$彳戊=\frac{二}{人彳人}丅甲^{二}彳人丄\frac{二人}{甲^{四}彳人}$$、

而

$$戊=\frac{四}{人^{三}}丅甲^{二}人丄\frac{三}{甲^{四}}(人)對丄呩$$、

卽

$$戊=\left(\frac{二}{甲^{二}丄天^{二}}\right)^{二}丅甲^{二}(甲^{二}丄天^{二})丄\frac{二}{甲^{四}}(甲^{二}丄天^{二})對丄呩$$.

乃積分也、

第十二款　凡合名微分、若括弧外變數之指數加一、以括弧內變數之指數約之、用加括弧外之指數而得整數、則積分可求、

設有式如下 $天^{寅丅一}(甲丄乙天^{卯})^{\frac{壬}{巳}}彳天$ 可作 $天^{寅丅一}\left[\left(\frac{天^{卯}}{甲}丄乙\right)天^{卯}\right]^{\frac{壬}{巳}}彳天$ 即 $天^{寅丅一}(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{壬}{巳}}天^{\frac{壬}{卯巳}}彳天$ 亦即 $天^{寅丄\frac{壬}{卯巳}丅一}(甲天^{丅卯}丄乙)^{\frac{壬}{巳}}彳天$ 若 $\frac{卯}{寅丄\frac{壬}{卯巳}}$ 爲整數、則可用前法（本卷十一款）求其積分、而 $\frac{卯}{寅丄\frac{壬}{卯巳}}$ 即 $\frac{卯}{寅}丄\frac{壬}{巳}$、故原式中 $\frac{卯}{寅}丄\frac{壬}{巳}$ 爲整數、則積分可求也、

設題

今有 $彳彳=甲(一丄天)^{丅\frac{二}{三}}彳天$ 求其積分、

令$亥^{二}天^{二}=一丄天^{二}$、則$(一丄天^{二})^{丅\frac{三}{二}}=亥^{丅三}天^{丅三}$

㊀、又$天^{二}=\frac{亥^{二}丅一}{一}$、故$彳天=\frac{天(亥^{二}丅一)^{二}}{丅亥彳亥}$

㊁、$一=天^{四}(亥^{二}丅一)^{二}$

㊂、以㊀㊁㊂三式連乘、得$彳戊=甲(一丄天^{二})^{丅\frac{三}{二}}彳天=丅\frac{亥^{二}}{甲彳亥}$、所以$戊=\frac{亥}{甲}=\frac{\sqrt{一丄天^{二}}}{甲天}丄丙$、卽積分也、

今有$禾戊=天^{丅四}(一丅天^{二})^{丅\frac{三}{二}}彳天$、求其積分、

令$亥^{二}天^{二}=一丅天^{二}$、則$天^{丅二}=亥^{二}丄一$、而$天^{丅四}=(亥^{二}丄一)^{二}$

㊀、又$天=(亥^{二}丄一)^{丅\frac{一}{二}}$、故$彳天=丅(亥^{二}丄一)^{丅\frac{三}{二}}亥彳亥$

㊁、又$(一丅天^{二})^{丅\frac{三}{二}}=\frac{亥天}{一}=\frac{亥}{(亥^{二}丄一)^{\frac{三}{二}}}$

㊂、以㊀㊁

㊂三式相乘得

$$彳戊=天^{T四}(一T天^{二})^{T\frac{三}{二}}彳天=T(亥^{二}⊥一)彳亥$$

故

$$戊=T\frac{三}{亥^{三}}T亥=T\frac{三}{亥(亥^{二}⊥三)}⊥口丙$$

即

$$戊=T\frac{三天^{三}}{一⊥二天^{二}}\sqrt{一T天^{二}}⊥口丙，$$

乃積分也。

今有

$$彳呋_{〇}=彳天(甲^{二}⊥天^{二})^{T\frac{三}{二}}$$

即

$$\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{彳天}、$$

求其積分。

令

$$亥=天⊥\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}，$$

則

$$彳亥=彳天⊥\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{天彳天}=\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{天⊥\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}彳天$$

故

$$\frac{亥}{彳亥}=\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{彳天}，$$

所以

$$呋_{ɔ}=禾\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{彳天}=禾\frac{亥}{彳亥}=亥對=(天⊥\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}})對、$$

即積分也。

今有 $\text{彳天}_{\text{二}}=\frac{(\text{甲}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{二}})^{\text{三}}}{\text{天}^{\text{二}}\text{彳天}}$、求其積分、

今 $\text{亥}=(\text{甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}})^{\text{三}}$、

則 $\text{彳亥}=\frac{(\text{甲}^{\text{二}}\text{天}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{四}})^{\text{三}}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{天彳天丄二天}^{\text{三}}\text{彳天}}$

卽 $\text{彳亥}=\frac{(\text{甲}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{二}})^{\text{三}}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{彳天}}\text{丄}\frac{(\text{甲}^{\text{二}}\text{丄天}^{\text{二}})^{\text{三}}}{\text{二天}^{\text{二}}\text{彳天}}$、

卽 $\text{彳亥}=\text{甲}^{\text{二}}\text{彳天}_{\circ}\text{丄二彳天}_{\text{二}}$、

此式中之呋。與前題同、所以

$\text{彳天}_{\text{二}}=\frac{\text{二}}{\text{彳亥}}\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{彳天}_{\circ}}$

而 $\text{呋}_{\text{二}}=\frac{\text{二}}{\text{亥}}\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{二}}\text{呋}_{\circ}}$

卽 $\text{呋}_{\text{二}}=\frac{\text{二}}{\text{天}}(\text{甲}^{\text{二}}\text{丄天})^{\text{二}}\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{二}}}\text{呋}_{\circ}$、

乃積分也、

凡合名微分、若其積分用上諸款皆不能求、則可令

積分藉簡于本式之微分而得其法分合名數為二分、其一分之積分已知、不必更推也

已別得

$彳(戊亥)＝戊彳亥丄亥彳戊$、

十卷九款求積分得

$戊亥＝禾戊彳亥丄禾亥彳戊$、

故

$禾戊彳亥＝戊亥丅禾亥彳戊$

㊀、此式求戊彳亥之積分、變為求亥彳戊之積分、是謂求分積分術之式、

合名微分簡法之式為

$天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$、

巳代分數、寅卯俱代整數、

第十三款　凡微分式如$天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$、其積分可藉相似微分式之積分而得、本式括弧外變數之指數、以括弧內之指數減之、為相似式、

置$亥=(甲丄乙天^{卯})^{申}$、指數申可任用何數、求微分得$彳亥=乙卯申天^{卯丅一}(甲丄乙天^{卯})^{申丅一}彳天$、若$戌彳亥=天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$、本款前論

則

$$戊=\frac{乙卯申}{天^{寅丅卯丄一}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申丄一}}、$$

求微分得

$$彳戊=\frac{乙卯申}{(寅丅卯丄一)天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申丄一}}彳天\,丄\,\frac{申}{(巳丅申丄一)天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}}彳$$

惟

$$(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申丄一}=(甲丄乙天^{卯})(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}$$

$$=甲(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}丄乙天^{卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}、$$

故

$$彳戊=\left(\frac{乙卯申}{甲(寅丅卯丄一)天^{寅丅卯}}丄\frac{卯申}{(寅丄一丄卯巳丅卯申)天^{寅}}\right)(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}彳$$

取申之同數令

$$寅丄一丄卯巳丅卯申=〇$$

即

$$申=\frac{卯}{寅丄一}丄巳、$$

則

$$彳亥=\frac{乙(卯巳丄寅丄一)}{甲(寅丅卯丄一)天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅申}}彳天、$$

用此戊亥彳戊彳亥諸同數于前(一)式本款前論

中式之中、則得呷術之式

$$禾天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天=\frac{乙(卯巳丄寅丄一)}{天^{寅丅卯丄一}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}丅甲(寅丅卯丄一)禾天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天}、$$

故可令所設微分之積

分、藉$天^{寅丁卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳$㈡之積分而得、㈡式即原式括弧外$天^{寅}$之

指數以括弧內$天^{卯}$之指數減之、所謂相似式也、依

例$禾天^{寅丁卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$又可藉$禾天^{寅丁二卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$而得、如此遞推、可令括弧外乘數

之指數遞損、至小于卯、

若合名式爲$彳天_{寅}=\frac{\sqrt{甲^{二}丁天^{二}}}{天^{寅}彳天}$欲求其積分、可依本款呷術之例

推之、以$甲^{二}$代甲、以$丁一$代乙、以二代卯、以$丁三$代巳、則

得 $\text{口天}_{寅}=禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅}\,彳天}=\frac{寅}{(寅丅一)甲^{二}}禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅丅二}\,彳天}丅\frac{寅}{天^{寅丅一}}\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}$、名為甲術之式、

設題

今有 $彳天。=\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{甲彳天}$、求其積分、

已別得$\frac{\sqrt{味^{二}丅地^{二}}}{味彳地}$為弧線之微分、十三卷十款後論味為半徑、地為正弦、故祆。亦為弧線之微分呋。為弧線、甲為半徑、天為正弦、

今有$祆_{二}=\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{二}祆}$、求其積分、

以二代甲術式中之寅、則得$呋_{二}=\frac{二}{甲^{二}}呋^{乙}丅\frac{二}{天}\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}$卽積分也、其呋。與

前題同、

今有 $\text{彳天}_{四}=\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{四}\text{彳天}}$ 求其積分、

以四代甲術式中之寅、則得 $\text{口天}_{四}=\frac{四}{三甲^{二}}\text{口天}_{二}丅\frac{四}{天^{三}}\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}$ 卽積分也其 $\text{口天}_{二}$ 與前題同、

今有 $\text{彳天}_{六}=\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{六}\text{彳天}}$ 求其積分、

以六代甲術式中之寅、則得 $\text{口天}_{六}=\frac{六}{五甲^{二}}\text{口天}_{四}丅\frac{六}{天^{五}}\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}$ 卽積分也、其 $\text{口天}_{四}$ 與

前題同

今有$彳天_{八}=\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{八}}彳天$、求其積分

以八代甲術式中之寅、則得$呹_{八}=\frac{八}{七甲^{二}}呹_{六}丅\frac{八}{天^{七}}\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}^{三}$即積分也、其呹六與

前題同

準甲術、合名式$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅}}彳天$之微分、可化爲$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅丅二}}彳天$之微分、而$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅丅二}}彳天$之微分又可化爲$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{天^{寅丅四}}彳天$之微分如此遞推、至于三寅次、

若寅爲偶數、則積數可藉$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{伏}$而得、$禾\frac{\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}}{伏}$乃正弦$\frac{甲}{天}$之弧也、本卷論弧線積分第一條

依甲術例又得式

$$呋_{寅}=禾\frac{\sqrt{甲^{二}\bot天^{二}}}{天^{寅}伏}=\frac{寅}{天^{寅丅一}}\sqrt{甲^{二}\bot天^{二}}丅\frac{寅}{寅丅一}甲^{二}禾\frac{\sqrt{甲^{二}\bot天^{二}}}{天^{寅丅二}伏}$$

名乙術之式、

設題

今有$彳天_{四}=\frac{\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}}{天^{四}}彳天$、求其積分

以四代乙術式中之寅、則得$呎_{四}=\frac{四}{天^{三}}\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}丅\frac{四}{三甲^{三}}禾\frac{\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}}{天^{二}彳天}$、卽積分也、其中$\frac{\sqrt{甲^{二}丄天^{二}}}{天^{二}彳天}$之積分已知、本卷十二款四題

設有合名式如$彳天_{寅}=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅}}彳天$、此本可以數代元而用呷術本款求其積分、今別立術求之、如左、

法置

$$亥=天^{寅丅一}\sqrt{二甲天丅天^{二}}、$$

即

$$亥=\left(二甲天^{二寅丅一}丅天^{二寅}\right)^{\frac{一}{二}}、$$

求微分得

$$後=\frac{\left(二甲天^{二寅丅一}丅天^{二寅}\right)^{\frac{三}{二}}}{甲\left(二寅丅一\right)天^{二寅丅二}彳天丅寅天^{二寅丅一}彳天}、$$

即

$$後=\frac{\left(二甲天丅天^{二}\right)^{\frac{三}{二}}}{甲\left(二寅丅一\right)天^{寅丅一}彳天}丅\frac{\left(二甲天丅天^{二}\right)^{\frac{三}{二}}}{寅天^{寅}彳天}、$$

第二項等于 $寅彳天_{寅}$、故

$$彳天_{寅}=\frac{寅\left(二甲天丅天^{二}\right)^{\frac{三}{二}}}{甲\left(二寅丅一\right)天^{寅丅一}彳天}丅\frac{寅}{後}、$$

求積分、得式

$$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅}彳天}=\frac{寅}{甲\left(二寅丅一\right)}禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅丅一}彳天}丅\frac{寅}{天^{寅丅一}}\sqrt{二甲天丅天^{二}}、$$

名丙術之式、式中 $\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅丅一}彳天}$、即原式括

弧外變數指數損一之式、

設題

今有 $彳呋=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{甲彳天}$、求其積分、

已別得 $\frac{\sqrt{二味天丅天^{二}}}{味彳天}$ 為弧之微分、味為半徑、天為正矢、十三卷十款後論故彳呋。亦為弧之微分、呋。為弧、甲為半徑、天為正矢、

今有 $彳呋=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天彳天}$、求其積分、

以一代丙術式中之寅、則得

$$\text{彳呋}_{一} = \text{呋}_{〇}\,丅\,\sqrt{\text{二甲天}\,丅\,\text{天}^{二}}、$$

卽積分也、其呋〇與

前題同、

今有

$$\text{彳呋}_{二} = \frac{\sqrt{\text{二甲天}\,丅\,\text{天}^{二}}}{\text{天}^{二}\,\text{彳天}}、$$

求其積分、

以二代丙術式中之寅、則得

$$\text{呋}_{二} = \frac{二}{\text{二甲}}\,\text{呋}_{一}\,丅\,\frac{二}{\text{天}}\sqrt{\text{二甲天}\,丅\,\text{天}^{二}}、$$

卽積分也、其呋一與

前題同、

今有$禾天_{三}=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{三}彳天}$、求其積分、

以三代丙術式中之寅、則得$口天_{三}=\frac{三}{五甲}口天_{二}丅\frac{三}{天^{三}}\sqrt{二甲天丅天^{二}}$、即積分也、其$口天_{二}$與

前題同、

今有$禾天_{四}=\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{四}彳天}$、求其積分、

以四代丙術式中之寅、則得$呹_{四}=\frac{四}{丱}呹_{三}丅\frac{四}{天^{三}}\sqrt{二甲天丅天^{二}}$即積分也、其$呹_{三}$與

前題同、

準丙術、合名式$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅}\ 伕}$之微分、可化為$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅丅一}\ 伕}$之微分、而$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅丅一}\ 伕}$、

之微分、又可化為$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{寅丅二}\ 伕}$之微分、如此遞推、至于寅次、

若寅為整數、則積數可藉$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{伕}$而得、$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{伕}$乃正矢$\frac{甲}{天}$之

弧也、本卷論弧線積分第四條

今有$\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{四}彳天}$、求其積分、

以三代丙術式中之寅、則得

$$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{四}彳天}=\frac{三}{四甲}禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{三}彳天}丅\frac{三}{二天^{三}}\sqrt{二甲天丅天^{二}}$$、

惟

$$\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{三}彳天}=\frac{\sqrt{二甲丅天}}{彳天}$$、

而

$$禾\frac{\sqrt{二甲丅天}}{彳天}=丅二\sqrt{二甲丅天}$$、

故

$$禾\frac{\sqrt{二甲天丅天^{二}}}{天^{四}彳天}=丅\frac{三}{八甲}\sqrt{二甲丅天}丅\frac{三}{二天^{三}}\sqrt{二甲天丅天^{二}}$$

即積分也、

準呷術惟寅爲正、則指數可損、今依呷術之例又

得術、令負指數亦可損、名叱術、如左

法置呷術式、取其母數$乙(卯巳丄寅丄一)$與禾號左之係數$甲(寅丅卯丄一)$交互相易、得

$$秝天^{寅丅卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天=\frac{甲(寅丅卯丄一)}{天^{寅丅卯丄一}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}丅乙(卯巳丄寅丄一)秝天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天}$$

卽叱術之式也、

今有$\frac{\text{天}(\text{一}\perp\text{天})^{\text{亖}}}{\text{彳天}}$即$\text{天}^{\text{丅二}}(\text{一}\perp\text{天}^{\text{三}})^{\text{丅亖}}\text{彳}$求其積分

令叱術式中$\text{寅丅卯}=\text{丅二}$、$\text{卯}=\text{一}$、$\text{乙}=\text{一}$、$\text{卯}=\text{三}$、$\text{巳}=\text{丅三}$、則得$\text{禾天}^{\text{丅二}}(\text{一}\perp\text{天}^{\text{三}})^{\text{丅三}}\text{彳天}=\text{丅天}^{\text{丅一}}(\text{一}\perp\text{天}^{\text{三}})^{\text{三}}\perp\text{禾天}(\text{一}\perp\text{天}^{\text{三}})^{\text{丅三}}\text{彳天}$即積分也

今有$\frac{天^{二}(二丅天^{二})^{\frac{二}{三}}}{彳天}$即$天^{丅二}(二丅天^{二})^{丅\frac{二}{三}}彳天$、求其積分、

令叱術式中

$寅丅卯＝丅二$

$甲＝二$

$乙＝丅一$

$卯＝二$

$巳＝丅\frac{二}{三}$、

則得

$$禾天^{丅二}(二丅天^{二})^{丅\frac{二}{三}}彳天＝丅\frac{二}{天^{丅一}(二丅天^{二})^{丅\frac{二}{一}}}丄禾(二丅天^{二})^{丅\frac{二}{三}}彳天$$、

即積分也、

第十四款　凡微分式如$天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天$、其積分可藉相似別式

求之其別式括弧外之指數必損一、

試置

$$亥＝天^{申}、$$

指數申任用同數俱可、求微分得

$$孩＝申天^{申丁一}伏、$$

設令

$$戊孩＝天^{寅}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}伏、$$

本卷十二款後論則得

$$戊＝\frac{申}{天^{寅丁申⊥二}}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}、$$

求微分得

$$彳戊＝\frac{申}{寅丁申⊥一}天^{寅丁申}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}伏⊥\frac{申}{乙卯巳}天^{寅丁申⊥卯}(甲⊥乙天^{卯})^{巳丁一}伏、$$

惟

$$(甲⊥乙天^{卯})^{巳}＝(甲⊥乙天^{卯})(甲⊥乙天^{卯})^{巳丁一}、$$

故

$$彳戊＝\frac{申}{甲(寅丁申⊥一)⊥乙(寅丁申⊥一⊥卯巳)天^{卯}}天^{寅丁申}(甲⊥乙天^{卯})^{巳丁一}伏、$$

取申

之同數、令

$寅丁申⊥一⊥卯巳＝○$、

即

$申＝寅⊥一⊥卯巳$、

則得

$$彼＝\frac{卯巳⊥寅⊥一}{丁甲卯巳天^{寅}丁申(甲⊥乙天^{卯})^{巳}丁一}伕$$、

用此戊亥彼後諸同數于前㊀式中、本卷十三款前論則得哂術之式

$$禾天^{寅}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}伕＝\frac{卯巳⊥寅⊥一}{天^{寅⊥一}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}⊥甲卯巳禾天^{寅}(甲⊥乙天^{卯})^{巳}丁一}伕$$、

故可令

指數必損一也、依例他積分可又藉一他積分而得、而括弧外之指數又損一、如是遞推可令括弧外之指數至小于一、

設題

今有 $彳天\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}$、求其積分、

令丙術式中 $寅=〇$ $甲=甲^{二}$ $乙=一$ $卯=二$ $巳=三$、則得

$$禾彳天\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}=\frac{二}{天\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}⊥\frac{二}{甲^{二}}禾\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{彳天}、$$

惟

$$禾\frac{\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}}{彳天}=\left[天⊥\sqrt{甲^{二}⊥天^{二}}\right]對、$$

本卷十二款三題

故 $\text{禾彳天}\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\perp\text{天}^{\text{二}}}=\frac{\text{二}}{\text{天}\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\perp\text{天}^{\text{二}}}}\perp\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{二}}}\left(\text{天}\perp\sqrt{\text{甲}^{\text{二}}\perp\text{天}^{\text{二}}}\right)\text{對}$ 即積分也、

今有 $\text{彳天}\sqrt{\text{天}^{\text{二}}\top\text{甲}^{\text{二}}}$ 求其積分 答式 $\frac{\text{二}}{\text{天}\sqrt{\text{天}^{\text{二}}\top\text{甲}^{\text{二}}}}\top\frac{\text{二}}{\text{甲}^{\text{二}}}\left(\text{天}\perp\sqrt{\text{天}^{\text{二}}\top\text{甲}^{\text{二}}}\right)\text{對}$

準呐術、惟括弧外之指數為正則可損、今依呐術之例又得術、令負指數亦可損、名叮術、如左

法置兩術式取其母數卯巳丄寅丄一與禾左之係數甲卯巳交互

相易得

$禾天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}彳天=\frac{甲卯巳}{丁天^{寅丄一}(甲丄乙天^{卯})^{巳}丄(卯巳丄寅丄一)禾天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}彳天}$、

即叮術之式也、

設題

今有$(\text{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})^{\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{三}}}\text{袱}$、求其積分、

令叮術式中

$\text{寅}=\text{〇}$

$\text{甲}=\text{二}$

$\text{乙}=\text{丅一}$

$\text{卯}=\text{二}$

$\text{巳}\,\text{丅}\,\text{一}=\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{三}}$、

則得

$$\text{禾}(\text{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})^{\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{三}}}\text{袱}=\frac{\text{二}}{\text{天}}(\text{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}})^{\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}}=\frac{\text{二}\sqrt{\text{二}\,\text{丅}\,\text{天}^{\text{二}}}}{\text{天}}$$、

即積分也、

今有$\dfrac{(\text{一}\,\text{丄}\,\text{天}^{\text{三}})^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}}{\text{天}\,\text{袱}}$即$\text{天}(\text{一}\,\text{丄}\,\text{天}^{\text{三}})^{\text{丅}\frac{\text{二}}{\text{一}}}\text{袱}$、求其積分、

令叮術式中

寅＝一

甲＝一

乙＝一

卯＝三

巳丅一＝丅三、

則得

禾天(一丄天三)丅三伕＝丅三/天三(一丄天三)三丄二禾天(一丄天三)三伕、

式中

天(一丄天三)三伕、

可詳爲級數、而每項求其積分、即得所求之積分、

代微積拾級卷十八

米利堅羅密士譔

英國　偉烈亞力　口譯
海寧　李善蘭　筆述

積分二

用積分術令曲線改直線之理

曲線改直線者、謂求得直線式、與曲線等也、葢凡曲線之長、可以代數諸項顯之、則一如直線焉、

已別得凡曲線準正交縱橫線、其微分式為

$$\text{彳人}=\sqrt{\text{彳天}^{二}\ \text{丄}\ \text{彳地}^{二}}$$、

四十

卷八款 故 $人=禾\sqrt{伕^{二}丄他$ ㊀、是謂曲線未定長短、用正交縱橫線推之之公式、凡改曲線式爲直線式、必求本曲線式之微分、用所得伕或他之同數于㊀式中、則開方根所括化爲一个變數之微分、乃求其積分、即得曲線之長、

設題

令有半立方拋物線式 $地^{三}=甲^{二}天^{二}$、求其任一分之長、

此式中天之同數爲 $\frac{甲}{地^{\frac{三}{二}}}$、求微分得 $伕=\frac{二甲}{三地^{\frac{一}{二}}}他$、故 $伕^{二}=\frac{四甲^{二}}{九地}他^{二}$、用此同

數于曲線微分公式中、得

$$\sqrt{\text{彳天}^{\text{二}}\perp\text{彳地}^{\text{二}}}=\sqrt{\left(\frac{\text{四甲}^{\text{二}}}{\text{九地}}\perp\text{一}\right)\text{彳地}^{\text{二}}}$$

$$=\text{彳地}\sqrt{\frac{\text{四甲}^{\text{二}}}{\text{九地}\perp\text{四甲}^{\text{二}}}}$$

$$=\text{彳地}\frac{\text{二甲}}{\left(\text{九地}\perp\text{四甲}^{\text{二}}\right)^{\frac{\text{二}}{\text{一}}}}$$、依前求積分、七十

卷八款得 $\text{禾}\sqrt{\text{彳天}^{\text{二}}\perp\text{彳地}^{\text{二}}}=\frac{\text{二七甲}}{\left(\text{九地}\perp\text{四甲}^{\text{二}}\right)^{\frac{\text{二}}{\text{三}}}}\perp\text{呐}$、求呐之同數、攷本題式、知在原點 $\text{地}=\text{〇}$ 時、

亦 $\text{人}=\text{〇}$、故 $\text{〇}=\frac{\text{二七}}{\text{八甲}^{\text{二}}}\perp\text{呐}$、即 $\text{呐}=\text{丅}\frac{\text{二七}}{\text{八甲}^{\text{二}}}$、是以全積分為 $\text{人}=\frac{\text{二七甲}}{\left(\text{九地}\perp\text{四甲}^{\text{二}}\right)^{\frac{\text{二}}{\text{三}}}}\text{丅}\frac{\text{二七}}{\text{八甲}^{\text{二}}}$、

今有弧線、試求其長、

已別得若弧為人、正切為酉、則

$$\text{彳人}=\frac{\text{一}\perp\text{酉}^{\text{二}}}{\text{彳酉}}=\text{彳酉}\frac{\text{一}\perp\text{酉}^{\text{二}}}{\text{一}}、$$

十三卷十款後論惟

$$\frac{\text{一}\perp\text{酉}^{\text{二}}}{\text{一}}=\text{一}\,\text{丅}\,\text{酉}^{\text{二}}\perp\text{酉}^{\text{四}}\,\text{丅}\,\text{酉}^{\text{六}}\perp\cdots\cdots、$$

故

$$\text{彳人}=\frac{\text{一}\perp\text{酉}^{\text{二}}}{\text{彳酉}}=\text{彳酉}\,\text{丅}\,\text{酉}^{\text{二}}\text{彳酉}\perp\text{酉}^{\text{四}}\text{彳酉}\,\text{丅}\,\text{酉}^{\text{六}}\text{彳酉}\perp\cdots\cdots、$$

每級各求積分、得

$$\text{禾彳人}=\text{人}=\text{酉}\,\text{丅}\,\frac{\text{三}}{\text{酉}^{\text{三}}}\perp\frac{\text{五}}{\text{酉}^{\text{五}}}\,\text{丅}\,\frac{\text{七}}{\text{酉}^{\text{七}}}\perp\frac{\text{九}}{\text{酉}^{\text{九}}}\,\text{丅}\cdots\cdots、$$

即

$$\text{人}=\text{酉}\left(\text{一}\,\text{丅}\,\frac{\text{三}}{\text{酉}^{\text{二}}}\perp\frac{\text{五}}{\text{酉}^{\text{四}}}\,\text{丅}\,\frac{\text{七}}{\text{酉}^{\text{六}}}\perp\frac{\text{九}}{\text{酉}^{\text{八}}}\,\text{丅}\cdots\cdots\right)、$$

設人為三十度弧、

其正切爲$\frac{\sqrt{三}}{一}$、即〇五七七三五〇、用此代級數中之酉、則得

$$人=\frac{\sqrt{三}}{一}\left(一\,\mathrm{丅}\,\frac{三\times三}{一}\,\mathrm{丄}\,\frac{五\times三^{二}}{一}\,\mathrm{丅}\,\frac{七\times三^{三}}{一}\,\mathrm{丄}\,\frac{九\times三^{四}}{一}\,\mathrm{丅}\cdots\right)$$

、即〇五二三五九八七、爲三十度弧之長、以六乘之、得三一四一五九二六五、爲半周之長、

今有擺線式$天=弧\,\mathrm{丅}\sqrt{二未地\,\mathrm{丅}\,地^{二}}$、求其任一分之長、

此式之微分爲 $彳天=\frac{\sqrt{二未地\top地^{二}}}{地彳地}$ 十五卷四款前論故 $彳天^{二}=\frac{二未地\top地^{二}}{地^{二}彳地^{二}}$、用此同數于曲線微分公式中、得 $彳人=\sqrt{彳地^{二}\perp\frac{二未地\top地^{二}}{地^{二}彳地^{二}}}$、即 $彳地\sqrt{\frac{二未地\top地^{二}}{二未地}}$、即 $彳地\sqrt{\frac{二未\top地}{二未}}$、即 $(二未)^{\frac{二}{一}}(二未\top地)^{\top\frac{二}{一}}彳地$、依前求積分十七卷八款得

$$禾(二未\top地)^{\top\frac{二}{一}}彳地=\top二(二未\top地)^{\frac{二}{一}}\perp呐、$$

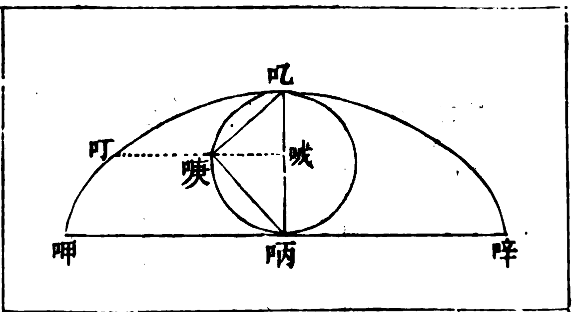
故

$$人=\top(二未)^{\frac{二}{一}}二\sqrt{二未\top地}\perp呐$$

$$=\top二\sqrt{二未(二未\top地)}\perp呐、$$

曲線分若從叱點起、則 $人=〇$ 時、

必$\text{地}=\text{二未}$、是$\text{○}=\text{○}\perp\text{呩}$、即$\text{呩}=\text{○}$、故擺線無常數、所以全積分爲$\text{人}=\text{丅二}\sqrt{\text{二未}(\text{二未丅地})}$、即擺線分之長、乃從𠮙點任至一點叮之數、觀圖、知$\text{𠮙𠯈}=\text{二未丅地}$、又準幾何理$\text{𠮙咦}^{\text{二}}=\text{𠮙呩}\times\text{𠮙𠯈}$、則$\text{𠮙咦}=\sqrt{\text{𠮙呩}\times\text{𠮙𠯈}}$



$=\sqrt{\text{二未}(\text{二未丅地})}$、故𠮙叮曲線分、等于倍𠮙咦、然則擺線分若從頂點起、恆等于所對母輪通弦之倍、故半擺線𠮙叮呷、等于全徑𠮙呩之倍、而全擺線呷叮𠮙啐、等

于全徑之四倍也、

今有拋物線式$\text{地}^{2}=\text{二巳天}$、求其任一分之長、

此式求微分以二約之得$\text{地彳地}=\text{巳彳天}$、故$\text{彳天}^{2}=\frac{\text{地}^{2}}{\text{巳}^{2}}\text{彳地}^{2}$、用此同數于曲線微分公式中得$\text{彳人}=\sqrt{\text{彳地}^{2}\,丄\,\frac{\text{地}^{2}}{\text{巳}^{2}}\text{彳地}^{2}}=\frac{\text{彳地}}{\text{巳}}\sqrt{\text{巳}^{2}\,丄\,\text{地}^{2}}$、依前求積分、十七卷十四款一題十得$\text{人}=\frac{\text{地}}{\text{二巳}}\sqrt{\text{巳}^{2}\,丄\,\text{地}^{2}}\,丄\,\frac{\text{巳}}{\text{二}}\left(\text{地}\,丄\,\sqrt{\text{巳}^{2}\,丄\,\text{地}^{2}}\right)\text{對}\,丄\,\text{呐}$、

拋物線分若從頂點起、則$\text{人}=〇$、亦$\text{地}=〇$、所以$〇=\frac{\text{巳}}{\text{二}}\text{巳對}\,丄\,\text{呐}$、即$\text{呐}=\mathrm{T}\,\frac{\text{巳}}{\text{二}}\text{巳對}$、是

以全積分為$八=\frac{二巳}{地}\sqrt{巳^{二}⊥地^{二}}⊥\frac{二}{巳}\left(\frac{巳}{地⊥\sqrt{巳^{二}⊥地^{二}}}\right)$對、

今有對數螺線、求其任一分之長、

凡極曲線準極角距、其微分公式為$彳八=\sqrt{彳徐^{二}⊥未^{二}彳酉^{二}}$、十四卷十二款對數螺線之式為$酉=未^{對}$、九卷四款求微分得$彳酉=\frac{未}{根彳徐}$用此同數于上式中、得$彳八=\sqrt{彳徐^{二}⊥根^{二}彳徐^{二}}=彳徐\sqrt{一⊥根^{二}}$、訥氏對數$根=一$、則$彳八=彳徐\sqrt{三}$、故$八=未\sqrt{三}⊥丙$、若曲線分

從極點起、則 $\text{人}=〇$ 時 $\text{未}=〇$ 即 $\text{呐}=〇$、故全積分為 $\text{人}=\text{未}\text{丄}\text{三}$ 是以訥

氏對數螺線從極點任至一點、其曲線分之長、等

于帶徑冪之對角線、

今有橢圜線式 $\text{地}^{2}=(\text{一}\text{丅}\text{戊}^{2})(\text{呷}^{2}\text{丅}\text{天}^{2})$、六卷一款六系 求其任一分之長

此式求微分、得 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{丅}\frac{\text{地}}{(\text{一}\text{丅}\text{戊}^{2})\text{天}}=\text{丅}\frac{\sqrt{\text{呷}^{2}\text{丅}\text{天}^{2}}}{\text{天}\sqrt{\text{一}\text{丅}\text{戊}^{2}}}$ 自乘、得 $\frac{\text{彳天}^{2}}{\text{彳地}^{2}}=\text{丄}\frac{\text{呷}^{2}\text{丅}\text{天}^{2}}{\text{天}^{2}(\text{一}\text{丅}\text{戊}^{2})}$、用此同數于微分公

式中、得

$$彳人=彳天\sqrt{一丄\frac{呷^{二}丅天^{二}}{天^{二}(一丅戊)}}=\frac{\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}}{彳天\sqrt{呷^{二}丅戊天^{二}}}=\frac{\sqrt{呷^{二}丅天}}{呷彳天\sqrt{一丅\frac{呷^{二}}{戊天^{二}}}}$$

、以

$$\sqrt{一丅\frac{呷^{二}}{戊天^{二}}}$$

詳爲級數、得

$$彳人=\frac{\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}}{呷彳天}\left(一丅\frac{二呷^{二}}{戊天^{二}}丅\frac{二乂四呷^{四}}{戊^{四}天^{四}}丅\frac{二乂四乂六呷^{六}}{三戊^{六}天^{六}}丅\cdots\right)$$

、每級依前求其積分、十七卷十三款甲術得

$$人=呟_{〇}丅\frac{二呷}{戊^{二}}呟_{二}丅\frac{二乂四呷^{三}}{戊^{四}}呟_{四}丅\frac{二乂四乂六呷^{五}}{三戊^{六}}呟_{六}丅\cdots$$

㈠、式中之呟。爲弧、呷爲半徑、天

爲正弦、而

$$呹_{二}=\frac{二}{呷呹_{〇}}丅\frac{二}{天}\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$$

$$呹_{四}=\frac{四}{三呷^{二}呹_{二}}丅\frac{四}{天^{三}}\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$$

$$呹_{六}=\frac{六}{五呷^{二}呹_{四}}丅\frac{六}{天^{五}}\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$$、

餘類推、設欲求橢圜周四分之一、當推 $天=〇$ $天=呷$ 二限中間之積分、惟 $天=呷$ 時 $\sqrt{甲^{二}丅天^{二}}=〇$、故 $呹_{二}$ $呹_{四}$ $呹_{六}$ 之諸同數爲

$$呹_{二}=\frac{二}{呷天_{〇}}$$

$$呹_{四}=\frac{四}{三呷^{二}呹_{二}}=\frac{二\times四}{三呷^{三}天_{〇}}$$

$$呹_{六}=\frac{六}{五呷^{二}呹_{四}}=\frac{二\times四\times六}{三\times五呷^{五}呹_{〇}}$$、

餘仿此、而㊀式爲

$$人=呹_{〇}\left(一丅\frac{二\times二}{戊^{二}}丅\frac{二\times二\times四\times四}{三戊^{四}}丅\frac{二\times二\times四\times四\times六\times六}{三\times三\times五戊^{六}}丅\cdots\right)$$、

即橢

圜周四分之一、式中呎。為平圜周四分之一、以呷為半徑、四倍之、得

$$二周呷\left(一丅\frac{二乂二}{戊^{二}}丅\frac{二乂二乂四乂四}{三戊^{四}}丅\frac{二乂二乂四乂四乂六乂六}{三乂三乂五戊^{六}}丅\cdots\right)$$

、即全橢圜周也、

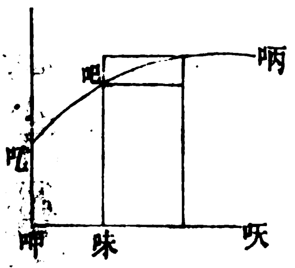
求曲線面積

求曲線面積者、謂求一矩形、與曲線面積相等也蓋凡曲線面積可用代數諸項顯之、則一如直線面積

焉、

凡曲線準正交縱橫線、其面積之微分公式爲伸=地伕、

十四卷九款



申爲呷吃吧味之面積、天地爲吧點之縱橫線、欲推何曲線面積、法用本曲線之式、或以天求地之同數、或以地他求伕之同數、用于公式中、乃求其積分、卽本曲線之面積也、

設題

今有抛物線、求其面積、

拋物線之式為$地^{二}＝二巳天$、求微分、得$彳天＝\frac{巳}{地彳地}$、用此同數于公式中、得$彳申＝地彳天＝\frac{巳}{地^{二}彳地}$求積分得$申＝\frac{三巳}{地^{三}}丄丙$、面積若從拋物線之頂點起、則$申＝〇$時亦$地＝〇$、故$丙＝〇$、所以全積分為$申＝\frac{三巳}{地^{三}}＝\frac{三巳}{地^{二}}地$、即$\frac{三巳}{地}二巳天$、即$\frac{三}{二}天地$、故拋物線從頂點起、任一段截面積、等于截點縱橫線矩積三分之二、

今有諸乘方拋物線、求其面積之公式、

拋物線之公式為$地^{卯}＝甲天$、八卷末條求微分得$卯地^{卯丁一}彳地＝甲彳天$、即$彳天＝\frac{甲}{卯地^{卯丁一}彳地}$、用此

同數于公式中、得 $禾申=地彳天=\frac{甲}{卯地^{卯}}彳地$、求積分得 $申=\frac{(卯丄一)甲}{卯地^{卯丄一}}丄丙$十七卷四款即 $申=\frac{卯丄一}{卯}\times\frac{甲}{地^{卯}}地丄丙$、以天代 $\frac{甲}{地^{卯}}$、則得 $\frac{卯丄一}{卯}天地丄丙$、若面積從拋物線之頂點起、則必 $丙=〇$、故 $申=\frac{卯丄一}{卯}天地$、所以凡拋物線之截面積、俱等于截點縱橫線之矩形以 $\frac{卯丄一}{卯}$ 乘之、若 $卯=二$、則為平方拋物線、其面積等于 $\frac{二}{三}天地$、若 $卯=一$、則成句股形、其面積等于 $\frac{一}{二}天地$、即

句股相乘積之半也、

今有平圜、求其面積、

平圜半徑等于一、其式為

$$地=(一丅天^{二})^{\frac{二}{一}}、$$

其右邊以合名法詳之得

$$地=一丅\frac{二}{天^{二}}丅\frac{二\times四}{天^{四}}丅\frac{二\times三\times八}{三天^{六}}丅\frac{二\times三\times四\times一六}{三\times五天^{八}}丅\cdots\cdots、$$

即

$$地=一丅\frac{二}{天^{二}}丅\frac{八}{天^{四}}丅\frac{一六}{天^{六}}丅\frac{一二八}{五天^{八}}丅\cdots\cdots、$$

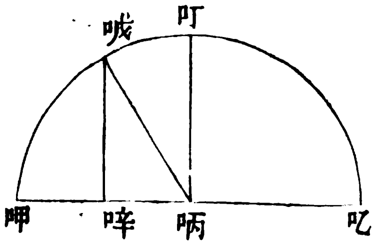
所以

$$地伕=伕丅\frac{二}{天^{二}伕}丅\frac{八}{天^{四}伕}丅\frac{一六}{天^{六}伕}丅\frac{一二八}{五天^{八}伕}丅\cdots\cdots、$$

每級各求積分、得

$$申=禾地伕=天丅\frac{六}{天^{三}}丅\frac{四〇}{天^{五}}丅\frac{一一二}{天^{七}}丅\frac{一一五二}{五天^{九}}丅\cdots丄昞、$$

求昞之



同數、若弧線從頂點叮起、則天＝○哂叮哦哻面積亦等于○、所以哂＝○故上級數若顯哂叮哦哻分之面積、而叮哦弧爲三十度、則哂哻爲三十度之正弦、爲$\frac{一}{二}$、即天、故哻上式爲

哂叮哦哻＝$\frac{一}{三}$丅$\frac{四八}{二}$丅$\frac{七二八○}{二}$丅$\frac{一四三三六}{二}$丅……

＝二四七八三○五五、

別得天＝$\frac{一}{三}$、則地＝$\sqrt{\frac{四}{三}}$、故句股形哂哻哦

面積之式爲 $\frac{四}{一}\sqrt{\frac{四}{三}}=\cdot二一六五〇六三$、而呩叮哦分之面積爲 $\cdot二六一七九九二$、以 一二 乘之、得 $三\cdot一四一五九\cdots$、卽平圜之面積、

今有楕圜、求其面積、

楕圜以中點及長短二徑爲準、其式爲 $地=\frac{呷}{叱}\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$、六卷一款案

用此同數于公式中、求得楕圜面積四分之一、如

下式 $禾地彳=\frac{呷}{叱}禾彳\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$、別得 $彳\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}$ 乃以呷爲半徑平圜面積之微分、

十四卷九款設題　故橢圜面積等于 $\frac{呷}{叱}$ 乘外切平圜面積、而外切平圜面積等于 $周呷^{二}$、故橢圜面積等于 $周呷^{二}\frac{呷}{叱}$、卽 $周呷叱$、

今有雙曲線、求其面積、

雙線以中點及二軸爲準、其式爲 $呷^{二}地^{二}丅叱^{二}天^{二}=丅呷^{二}叱^{二}$、卽 $地=\frac{呷}{叱}\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}$、故 $神=地彳=\frac{呷}{叱彳}\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}$、依

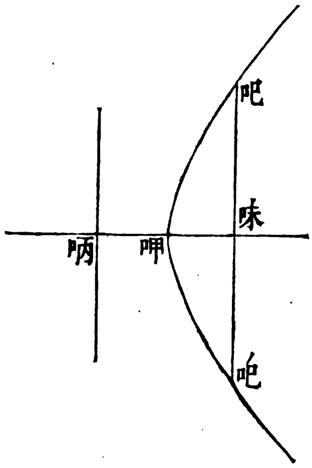
前求積分、十七卷二十四款設題二得

$$申=𠮙天\frac{二呷}{\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}}丅\frac{二}{呷𠮙}\left(天丄\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}\right)對丄呐、$$

求呐之同數、令

$天=呷$、

則



$申=〇$、

而得

$$〇=丅\frac{二}{呷𠮙}呷對丄呐、$$

即

$$呐=\frac{二}{呷𠮙}呷對、$$

故

$$申=\frac{二呷}{𠮙天\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}}丅\frac{二}{呷𠮙}\left(\frac{呷}{天丄\sqrt{天^{二}丅呷^{二}}}\right)對、$$

即曲線面積

呷吧咊一段、故全面積呷吧咆之式為

$$\frac{呷}{叱天\sqrt{天^{2}丁呷^{2}}}丁呷叱\left(\frac{呷}{天\perp\sqrt{天^{2}丁呷^{2}}}\right)對、$$

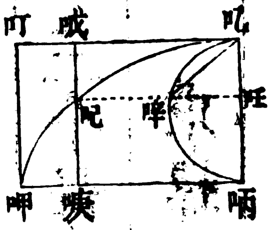
等于

$$天地丁呷叱\left(\frac{呷}{天}\perp\frac{叱}{地}\right)對、$$

即

$$天地丁呷叱\left(\frac{呷叱}{呷地\perp叱天}\right)對、$$

今有擺線、求其面積、



呷叱呐爲擺線面、求其積、簡法先求呷叱叮面積、令

$\text{叱呐}=\text{二未}$

$\text{呷咦}=\text{天}$

$\text{吧咦}=\text{地}$、

則

$\text{吧哦}=\text{二未}\top\text{地}=\text{亥}$

故得

$\text{彳}(\text{呷叮哦吧})=\text{神}=\text{亥彳天}=(\text{二未}\top\text{地})\text{彳天}$、

惟擺線之微分式爲

$\text{彳天}=\frac{\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{二}}}{\text{地彳地}}$、

十五卷擺線理條

故

$\text{神}=\text{彳地}\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{二}}$、

而

$\text{申}=\text{禾彳地}\sqrt{\text{二未地}\top\text{地}^{二}}\perp\text{呐}$、

此乃未爲半徑、地爲縱線、平圜分之面積、十四卷九款設題即呐哱吒分之面積、設呷叮哦吧面積從呷叮線起、而呐

哷咥面積從呧點起、則地$=$〇時、二面皆等于〇、故呧$=$〇、

所以$\frac{呷}{吁嗟}=\frac{呧}{咥}$、若地$=\frac{二}{一}$末、則$\frac{呷}{吃吁}=\frac{呧}{咥吃}=\frac{二}{周末^{三}}$惟呷吁吃呧矩積等于$\frac{呷}{呧}\times\frac{呷}{吁}=$周末$\times$二末$=$二周末^{二}、所以

呷吃呧面積等于$\frac{呷}{吁吃呧}$丁$\frac{呷}{吃吁}=\frac{二}{三}$周末^{二}、即三个呧哷吃半圜、倍之爲

三个母輪面積、即擺線面全積、

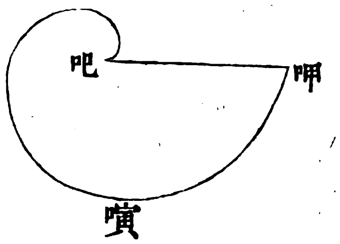
求螺線面積

極曲線面積微分之公式爲神$=\frac{二}{末}$酉^{二}、十四卷十三款

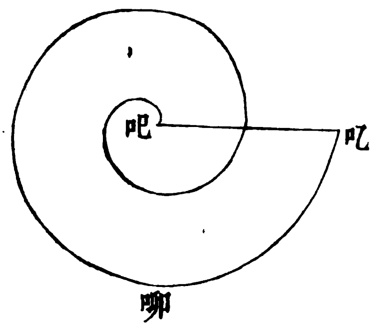
設題

今有亞奇氏螺線、求其面積、

亞奇氏螺線之式爲 $未=\frac{酉}{二周}$、九卷二款求微分得 $彳未=\frac{彳酉}{二周}$、卽 $彳酉=二周彳未$、用此同數于公式中、得 $彳申=周未^{二}彳未$、求積分得 $申=\frac{周未^{三}}{三}=\frac{酉^{三}}{二四周^{二}}$、若 $酉=二周$ 則 $申=\frac{周}{三}$、乃



帶徑行一匝所成吧嗊呷螺線面積、等于匝末帶徑長吧呷爲半徑平圓面積三分之一、若 $酉=二(二周)$、則 $申=\frac{八周}{三}$、乃帶徑行二匝所



成螺線面積也帶徑既行二匝必重成吧嗊呷面、故于$\frac{三}{八周}$內減一吧嗊呷面積、得$\frac{三}{七周}=\frac{三}{周}丅\frac{三}{八周}$、爲吧啣吃面積、三匝已上類推、他螺線仿此、

今有雙線螺線、求其面積、

雙線螺線之式爲$未=\frac{酉^{二}}{甲}$、九卷三款右邊自乘用于公式中、得$神=\frac{二酉^{二}彳酉}{甲}$、求積分得$申=丅\frac{二酉}{甲三}$、

今有對數螺線、求其面積、

對數螺線之式爲 $酉=對未$、九卷四款求微分得 $彳酉=\frac{根彳未}{未}$、若 $根=一$、則 $彳酉=\frac{彳未}{未}$

用于公式中、得 $彳甲=\frac{未^{二}彳酉}{二}$、求積分、得 $甲=\frac{未^{二}}{四}\perp丙$、若 $未=〇$、則 $甲=〇$、故 $丙=〇$、所

以 $甲=\frac{未^{二}}{四}$、爲訥氏對數螺線之面積、等于匝末帶徑正方四分之一、

求曲面面積 曲面者、面界旋轉所成之面也、

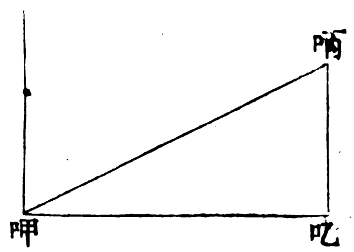
凡面界旋轉一匝、所成面積微分、爲 $彳甲=二周地\sqrt{彳天^{二}\perp彳地^{二}}$、十四卷十款故

$呻=禾二周地\sqrt{彳天^{二}\perp彳地^{二}}$ ㊀、乃一切曲面之公式、以橫軸為面旋轉之軸、

$\sqrt{彳天^{二}\perp彳地^{二}}$ 為母曲線微分之公式、欲求某曲面積、法以本母曲線式求微分、或以天彳天求得地彳地之二同數、或以地彳地求得彳天之同數、用于公式中而求其積分、卽得所求曲面積、

設題

今有圓錐體、求其曲面積、

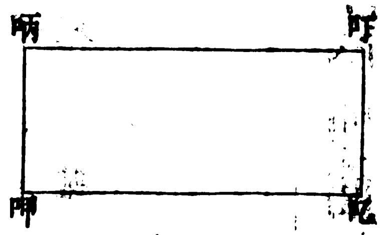


如呷吃呐句股形、以呷吃爲軸、旋轉一匝、其弦呷呐、必成圜錐之曲面、命呷吃爲辛、吃呐爲乙、呷爲原點、呷呐內任一點之縱橫線爲天地、則有比例 $天:地::辛:乙$、故 $地=\frac{辛}{乙天}$、求微分得 $彳地=\frac{辛}{乙}彳天$、而 $彳地^{二}=\frac{辛^{二}}{乙^{二}}彳天^{二}$、用此地彳二同數于公式中得 $呻=禾二周\frac{辛^{二}}{乙天}彳天\sqrt{辛^{二}丄乙^{二}}$、即 $呻=周\frac{辛^{二}}{乙天^{二}}\sqrt{辛^{二}丄乙^{二}}丄呐$、若

曲面積從頂點起、則$天=〇$時、亦$呷=〇$、故$呐=〇$、所以$呷=周\frac{辛^{二}}{乙天^{二}}\sqrt{辛^{二}\perp乙^{二}}$、若$天=\frac{呷}{吃}=辛$、則得$呷=周乙\sqrt{辛^{二}\perp乙^{二}}=二周乙\frac{三}{呷呐}$、卽以辛為高、以乙為底半徑之圜錐曲面積、故凡圜錐曲面、必等于底周乘半斜線、

今有圜柱體、求其曲面、

如呷吃叮呐矩形、以呷吃為軸、旋轉一匝、呐叮必



行成曲面、命呷吃為辛、呷呐為乙、則嗙叮直線之式為 地＝乙、故 𠯈＝〇、用此二同數于公式中得

禾二周地$\sqrt{伕^{二}丄𠯈^{二}}$＝禾二周乙伕＝二周乙天丄呐、

若曲面積從呷點起、則 天＝〇、時、亦 呻＝〇、故 呐＝〇、若 天＝$\frac{呷}{吃}$＝辛、則得 呻＝二周乙辛、故圜柱之曲面、等于底周乘高、

今有立圜體求其曲面

母平圜以心爲原點其式爲 $天^{二}丄地^{二}＝味^{二}$、求微分得 $天彳天丄地彳地＝〇$、所以

$$彳地＝丅\frac{地}{天彳天}$$

而

$$彳地^{二}＝\frac{地^{二}}{天^{二}彳天^{二}}$$、

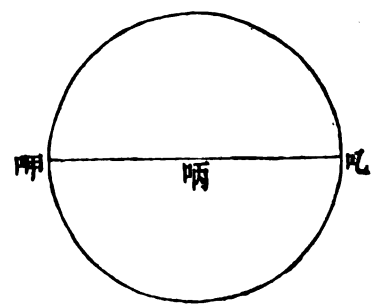
用此同數于公式中得

$$呷＝禾二周地\sqrt{\left(\frac{地^{二}}{天^{二}}丄一\right)彳天^{二}}＝禾二周彳天\sqrt{天^{二}丄地^{二}}$$

$$＝禾二周味彳天＝二周味天丄呐$$、

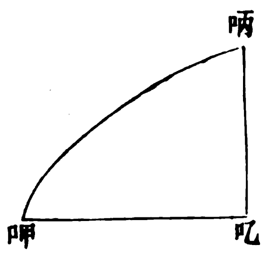
求呐之同數、

設曲面從球之中心起則 $天＝〇$ 時、積分亦等于〇故



$呥=○$ 令 $天=味$、則得半球之曲面為 $二周味^{二}$、而全球曲面為 $四周味^{二}$、故球之曲面積等于四个球徑之平圜、

今有拋物線體、求其曲面、



如呷叿呥為拋物面分、以呷叿為軸旋轉一匝、則呷呥必行成曲面面、拋物線之式為 $地^{二}=二巳天$、求微分得 $彳天=\frac{巳}{地}彳地$、而 $彳天^{二}=\frac{巳^{二}}{地^{二}}彳地^{二}$、用此

同數于公式中得 $彳呻=二周地\sqrt{\left(\frac{巳^二}{地^二丄巳^二}\right)彳地^二}=\frac{巳}{二周}地彳地\sqrt{地^二丄巳^二}$、依前求積分、十七卷八款得 $呻=\frac{三巳}{二周}(地^二丄巳^二)^{\frac{二}{三}}丄呥$、求呥之同數、令 $地=〇$、則 $呻=〇$、而式變爲 $〇=丅\frac{三}{二周巳^三}丄呥$、故 $呥=丅\frac{三}{二周巳^三}$、設積分在 $地=〇$ $地=乙$ 二限之間、則曲面之全積分爲 $\frac{三巳}{二周}\left[(乙^二丄巳^二)^{\frac{二}{三}}丅巳^三\right]$

今有橢圜體、以長徑爲軸、求其曲面、

別得公式

$$彳申=二周地\sqrt{彳天^{二}丄彳地^{二}}$$、

即

$$彳申=二周地彳人$$、

十四卷十款

惟橢圜線微分為

$$彳人=\frac{\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}}{呷彳天}\left(一丅\frac{二呷^{二}}{戊天^{二}}丅\frac{二乂四呷^{四}}{戊^{四}天^{四}}丅\frac{二乂四乂六呷^{六}}{三戊^{六}天^{六}}丅\cdots\right)$$、

卷本

曲線改直線條設題六

故

$$彳申=\frac{\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}}{二周呷地彳天}\left(一丅\frac{二呷^{二}}{戊天^{二}}丅\frac{二乂四呷^{四}}{戊^{四}天^{四}}丅\frac{二乂四乂六呷^{六}}{三戊^{六}天^{六}}丅\cdots\right)$$、

惟

$$\frac{\sqrt{呷^{二}丅天^{二}}}{呷地}=吃$$、

故

$$彳申=二周吃彳天\left(一丅\frac{二呷^{二}}{戊天^{二}}丅\frac{二乂四呷^{四}}{戊^{四}天^{四}}丅\frac{二乂四乂六呷^{六}}{三戊^{六}天^{六}}丅\cdots\right)$$、

每級各求積分、得

$$申=二周吃天\left(一丅\frac{二乂三呷^{二}}{戊天^{二}}丅\frac{二乂四乂五呷^{四}}{戊^{四}天^{四}}丅\frac{二乂四乂六乂七呷^{六}}{三戊^{六}天^{六}}丅\cdots\right)丄丙$$、

若$天=〇$、則$呻=〇$、故$丙=〇$、所以$天=呷$、則得

$$呻=二周呷叱\left(一\,\text{丅}\,\frac{二\times三}{戊^{三}}\,\text{丅}\,\frac{二\times四\times五}{戊^{四}}\,\text{丅}\,\frac{二\times四\times六\times七}{三戊^{六}}\,\text{丅}\cdots\right)$$

、為橢圜體曲面之半、倍之得

$$四周呷叱\left(一\,\text{丅}\,\frac{二\times三}{戊^{三}}\,\text{丅}\,\frac{二\times四\times五}{戊^{四}}\,\text{丅}\,\frac{二\times四\times六\times七}{三戊^{六}}\,\text{丅}\cdots\right)$$

、為橢圜體全曲面、

今有擺線體、以底邊爲軸、求其曲面、

曲面之微分公式爲

$$\text{彳申}=\text{二周地彳人}$$

、惟擺線微分爲

$$\text{彳人}=\text{彳地}\sqrt{\frac{\text{二未地丅地}^{\text{二}}}{\text{二未地}}}$$

、本卷曲線改直線條設題三故

$$\text{彳申}=\text{二周地彳地}\sqrt{\frac{\text{二未地丅地}^{\text{二}}}{\text{二未地}}}$$

、即

$$\text{彳申}=\frac{\sqrt{\text{二未地丅地}^{\text{二}}}}{\text{二周}\sqrt{\text{二未}}\,\text{地}^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}\text{彳地}}$$

、依前求其積分、十七卷十三款丙術設題六得

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{二未地丅地}^{\text{二}}}}{\text{地}^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}\text{彳地}}=\text{丅}\frac{\text{三}}{\text{八未}}\sqrt{\text{二未丅地}}\,\text{丅}\frac{\text{三}}{\text{二地}}\sqrt{\text{二未丅地}}$$

、故

$$\text{禾}\frac{\sqrt{\text{二未地丅地}^{\text{二}}}}{\text{二周}\sqrt{\text{二未}}\,\text{地}^{\frac{\text{三}}{\text{二}}}\text{彳地}}=\text{二周}\sqrt{\text{二未}}\,\text{丅}\frac{\text{三}}{\text{八未}}\sqrt{\text{二未丅地}}\,\text{丅}\frac{\text{三}}{\text{二地}}\sqrt{\text{二未丅地}}\,\text{丄丙}$$

若曲面從乙點上之圜周起、則 $\text{地}=\text{二未}$ 時、$\text{申}=\text{〇}$、

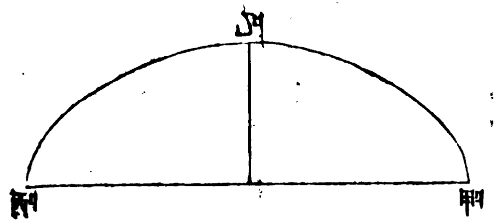
今有擺線體以底邊為軸求其曲面

曲面之微分公式為 呷＝二周地仈 推擺線微分為 仈＝…（本卷曲線改直）

題三條設 … 故 … 即 … 依前求其積分（十七卷十三款 西術設題十六）

得 … 故 …

若曲面從○點上之圓周起則 地＝末 時 呷＝○



故〇丙一若積分在〇地二地一末二限之間則得三圓未

為半曲面倍之得三四圓六為全曲面故以底

為軸之擺線體其曲面等于三分母輪

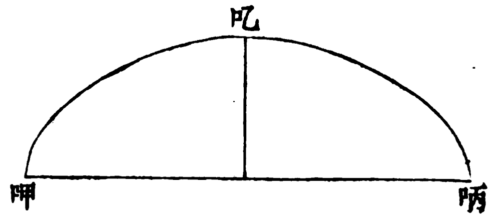
面之六十四自二十一个母輪面又三

分母輪面之一也

求曲線體積曲線體者謂曲線面旋轉一面所成之體也

求曲線體積者、謂求得立方體積與曲線體積等也、

凡曲線體積之微分為彳戊=地一依十四倍十一款故禾=禾地依〇乃曲線



故丙＝若積分在地＝　地＝二二限之間則得三三二周…

為半曲面、倍之、得三六四周…、為全曲面、故以底為軸之擺線體、其曲面等于三分母輪面之六十四、即二十一个母輪面又三分母輪面之一也、

求曲線體積

曲線體者、謂曲線面旋轉一匝所成之體也、

求曲線體積者、謂求得立方體積、與曲線體積等也、

凡曲線體積之微分為彳亥＝周地彳天、十四卷十一款故咳＝禾周地彳天㊀、乃曲線

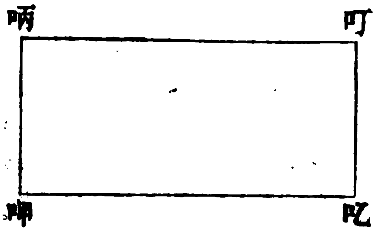
體積之公式、式中天地爲母曲線之縱橫線、橫軸卽曲面旋轉之軸、凡欲求某曲線之體積、必先求本曲線式之微分、或以地𢓜求彳天之同數、或以天求地之同數、用于㊀式中、求其積分、卽得所求之體積、

設題

今有圜柱體、求其積、

命圜柱底半徑呷㖼爲未、其高呷叱爲辛、則得

咳＝禾周地彳天、



$咳=禾周未^{二}伏$

$=周未^{二}天丄哂$、若以$天=○$、$天=呷吃=辛$為二限、求其中間積分、則得$咳=周未^{二}辛$、故圜柱之體積、等于底面乘高、

今有圜錐體、求其積、

命圜錐之高為辛、底面之半徑為未、準前本卷求曲面積條設題一得$地=\frac{辛}{未}天$、$地^{二}=\frac{辛^{二}}{未^{二}}天^{二}$、用地之同數于公式中、得$咳=\frac{辛^{二}}{未^{二}}周天^{二}伏$、故$咳=\frac{三辛^{二}}{未^{二}周天^{三}}丄哂$、以

天$=$〇
天$=$辛
為二限、求其積分、得

咳$=\frac{一}{三}$周末^{二}辛$=\frac{周末^{二}辛}{三}$、

故圓錐之體積、等于底面乘高三分之一、

今有橢圜體、以長徑為軸、求其積、

橢圜之式為

地$^{二}=\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$(呷^{二}丅天^{二})、

六卷一款案 用此同數于公式中、得

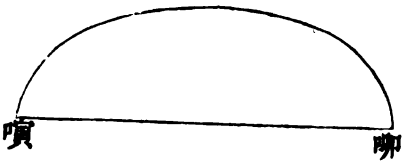
彳亥$=$周$\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$(呷^{二}丅天^{二})彳天

求積分得

咳$=$周$\frac{呷^{二}}{叱^{二}}$(呷^{二}天丅$\frac{天^{三}}{三}$)丄丙、

若積分從長徑中點之垂面起、則天$=$〇、

時、亦$咳=〇$、所以$呥=〇$、故$咳=\frac{呷^2}{周乙^2}\left(呷^2天丅\frac{天^3}{三}\right)$、若$天=呷$、則得$\frac{三}{二}周吃^2呷$、為半體積、倍之、



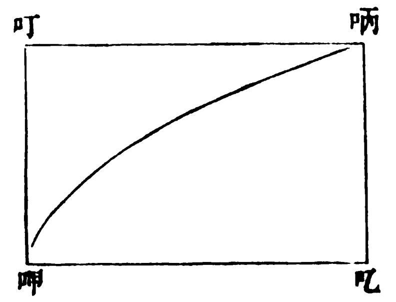
得全體積$\frac{三}{四}周吃^2呷$、即$\frac{二}{三}周吃^2 \times 二呷$、惟$周吃^2$為短徑上之平圜、而$二呷$為長徑嗔唧、所以橢圜體積、等于外切圜柱體三分之二、

系、若$呷=吃$、則得$\frac{三}{四}周味^3=\frac{六}{一}周叮^3$、為球之體積、叮即全徑

今有拋物線體、求其積、

拋物線之式爲 地^{二}＝二巳天、用此同數于公式中、得 彳亥＝二周巳天彳天、故 咳＝周巳天^{二}⊥呐、

設 天＝〇、則 咳＝〇、故 呐＝〇、命呷吃爲辛、吃呐爲乙、求 天＝辛 天＝〇 二限中間之積分、得 咳＝周巳辛^{二}、即 咳＝周乙^{二}辛/二、惟 周乙^{二} 爲吃呐



爲半徑平圜之面積、故拋物線體積等于同底同高圜柱體積之半、

今有諸拋物線體、求各積之公式、

諸拋物線之公式為 $地^{卯}=甲天$、故 $彳天=\frac{甲}{卯地^{卯丅一}彳地}$、用此同數于體積微分公式中、得 $彳亥=\frac{甲}{周卯地^{卯丄一}彳地}$、求其積分、得 $咳=\frac{(卯丄二)甲}{周卯地^{卯丄二}}丄呐$、即 $咳=\frac{卯丄二}{卯}周地^{二}\frac{甲}{地^{卯}}丄呐$、即 $咳=\frac{卯丄二}{卯}周地^{二}天丄呐$、設 $天=〇$、則 $咳=〇$、故 $呐=〇$、所以 $咳=\frac{卯丄二}{卯}周地^{二}天$、即拋物線體之積分公式也、若 $卯=二$、則式變為 $\frac{二}{一}周地^{二}天$、即平方拋物線體積、本條設題四、若 $卯=一$、則曲線變為直線、其式為 $\frac{三}{一}周地^{二}天$、即圜錐體積、本條設題二

今有擺線體、求其積、

曲線體微分之公式為

$\text{彳亥}=\text{周地}^{二}\text{彳天}$、

擺線之微分式十五卷四款前論為

$\text{彳天}=\frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{\text{地彳地}}$、

故

$\text{彳亥}=\frac{\sqrt{二未地丅地^{二}}}{\text{周地}^{三}\text{彳地}}$、

依前求其積分十三款丙術設題四得

$\text{亥}=\text{周}\left(\frac{三}{五未}\text{呋}_{二}\,丅\,\frac{三}{\text{地}}\sqrt{二未地丅地^{二}}\right)\,丄\,\text{丙}$

式中

$\text{呋}_{二}=\frac{二}{三未}\text{呋}_{一}\,丅\,\frac{三}{\text{地}}\sqrt{二未地丅地^{二}}$

$\text{呋}_{一}=\text{呋}_{〇}\,丅\,\sqrt{二未地丅地^{二}}$、

呋。乃未為半徑地為矢之弧線、今求

地＝〇

地＝二未

二

限中間之積分、$地=〇$、則上諸項俱變為〇、故$呐=〇$、而$地=末$

則上諸項變為

$呋_{〇}=一周末$

$呋_{一}=呋_{〇}=周末$

$呋_{二}=一\frac{一}{三末}呋_{一}=\frac{二}{三周末^{二}}$、

故

$咳=\frac{二}{五周末^{三}}$、

為體積之半倍之得$五周末^{二}$、為全體積、別得$周(二末)^{二}$為外切圓柱之底面、$二周末$為其高、$八周末^{三}$為其體積、故擺線體積、為外切圓柱體積八分之五、